Fisica 2 per biotecnologie: Prova Scritta 11 Febbraio 2013

Scrivere immediatamente, <u>ED IN EVIDENZA</u>, sui due fogli protocollo consegnati (ed eventuali altri fogli richiesti) la seguente tabella:

NOME : .... Numero lettere del nome $NN =$ **.................**

COGNOME : .... Numero lettere del Cognome $NC =$ **.................**

NUMERO DI MATRICOLA : .... $= NM$

[esempio: Mario (NN = 5) Careri (NC = 6) matricola 12345 (NM = 12345)]

Testo unico

per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti

(tempo a disposizione 2 ore)

1.) Si consideri un circuito alimentato da una batteria da $V_0 = 5 \cdot NC$ Volt e formato da due resistenze uguali $R_1 = R_2 = R = NN$ KΩ, in serie. Si calcoli la corrente erogata dalla batteria e la tensione V_{R_2} ai capi della resistenza R_2. **(2 punti)**

Un condensatore C di $200\,\mu$F e resistenza interna uguale ad $R_3 = R_1 = R_2 = R$, viene collegato in parallelo alla resistenza R_2 per mezzo di un interruttore. Immediatamente dopo la chiusura del circuito quanto varrà la tensione ai capi di R_2? **(punti 3)**

Quando il condensatore sarà del tutto caricato a che valore sarà la tensione ai capi di R_2? **(punti 3)**

Usando il suggerimento qui sotto, discutere la legge temporale con cui la tensione V_{R_2} passa dal suo valore iniziale al suo valore finale e quindi la legge temporale con cui la corrente che attraversa il condensatore varia dal suo valore massimo a zero. **(punti 5)**

suggerimento: *il caso di un circuito complesso si riduce al normale processo di carica di un condensatore in serie ad una resistenza equivalente R_{eq}. Nel caso del nostro circuito tale resistenza equivalente è data dalla resistenza totale di R_3 in serie con le due resistenze R_1, R_2, che sono tra loro in parallelo, cioè $R_{eq} = R_3 + R_1 \cdot R_2/(R_1 + R_2) = 3/2\,R$, visto che sono tutte uguali ad R. Dunque la costante di tempo del circuito sarà ....*

2.) Con riferimento al circuito dell'esercizio precedente si studi l'andamento nel tempo del campo magnetico intorno al filo che conduce al condensatore nelle zone esterne al filo, ma così vicine al filo stesso da poterlo assumere di lunghezza praticamente infinita. In particolare si studi il modulo del campo magnetico (in funzione del tempo) facendo un plot del modulo di $B(t)/B_{\rm Max}$ (dove $B_{\rm Max}$ è il massimo valore assunto dallo stesso campo magnetico). **(3 punti)**

Si discutano anche la direzione ed il verso del campo magnetico **(punti 4)**.

3.) In un dato istante, il campo magnetico di un'onda elettromagnetica piana monocromatica è diretto lungo $-\hat{x}$ (diciamo verso OVEST), mentre il campo elettrico (allo stesso istante) è diretto lungo $\hat{y}$ (verso NORD). Sapendo che l'intensità trasportata vale $I = 560 \cdot NN/5$ Watt/m^2, derivare:

i) direzione e verso di propagazione dell'onda; **(2 punti)**

ii) il valore massimo del campo elettrico; il valore massimo del campo magnetico; **(3 punti)**

iii) il contributo del campo magnetico e del campo elettrico all'intensità dell'onda; **(3 punti)**

iv) il numero di fotoni che incidono al secondo su di una superficie perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda se la sua lunghezza d'onda vale $\lambda = 500$ nm; **(3 punti)**

v) l'energia cinetica (in eV) degli elettroni estratti (per effetto fotoelettrico) dall'onda da un catodo il cui lavoro di estrazione vale $W_0 = 2.0$ eV. **(2 punti)**

Valori utili (*non tutti necessari allo svolgimento del compito*):
- valore della carica elementare $q_e = 1.602 \times 10^{-19}$ Coulomb.
- costante di Planck $h = 6.626 \times 10^{-34}\, Joule \cdot sec$
- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k_e \approx (2.998)^2 \times 10^9$ N·m^2 / C^2 ; $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$ Tesla · m/Ampere
- massa dell'elettrone $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ Kg
- velocità della luce 2.998×10^8 m/sec
- numero di Avogadro 6.022×10^{23} mole^{-1}
- equivalente meccanico del calore: 4.1868 Joule/cal

Fisica 2 per biotecnologie
Prova scritta: 11 Febbraio 2013
Soluzione Testo unico
per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti

1.) *Si consideri un circuito alimentato da una batteria da $V_0 = 5 \cdot NC$ Volt e formato da due resistenze uguali $R_1 = R_2 = R = NN$ KΩ, in serie. Si calcoli la corrente erogata dalla batteria e la tensione V_{R_2} ai capi della resistenza R_2.*

La resistenza equivalente di due resistenze in serie è data dalla somma delle due resistenze, quindi la corrente erogata varrà

$$i = \frac{V_0}{R_1 + R_2} = \frac{V_0}{2\,R} = \frac{5 \cdot NC\,\mathrm{Volt}}{2\,NN \cdot 10^3\,\Omega} = 3\,\mathrm{mAmpere}\,,$$

circolante in entrambe le resistenze. La Tensione V_0 risulta ugualmente suddivisa tra le due resistenze (uguali) R_1 ed R_2, $V_1 = R_1 \cdot i = V_0/2$, $V_2 = R_2 \cdot i = V_0/2 = 15$ Volt.

Un condensatore C di 200 μF e resistenza interna uguale ad $R_3 = R_1 = R_2 = R$, viene collegato in parallelo alla resistenza R_2 per mezzo di un interruttore. Immediatamente dopo la chiusura del circuito quanto varrà la tensione ai capi di R_2?

Appena dopo la chiusura del circuito il condensatore sarà ancora scarico ed il circuito equivalente vedrà in parallelo la resistenza R_2 e quella interna del condensatore R_3, poste poi in serie con R_1. La corrente erogata sarà ora

$$i' = \frac{V_0}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{V_0}{R + \frac{1}{2}\,R} = \frac{2}{3}\,\frac{V_0}{R} = 4\,\mathrm{mAmpere}$$

Così la tensione ai capi di R_2 risulterà

$$V_{R_2}|_{iniziale} = V_0 - R_1 \cdot i' = V_0 - \frac{2}{3}V_0 = \frac{1}{3}V_0 = 10\,\mathrm{Volt}\,.$$

Quando il condensatore sarà del tutto caricato a che valore sarà la tensione ai capi di R_2?

A condensatore carico nessuna corrente circolerà nel ramo in cui esso è presente e la situazione tornerà ad essere analoga a quella instaurata PRIMA della chiusura dell'interruttore, ovvero $V_{R_2}|_{finale} = V_0/2 = 15\,\mathrm{Volt}$.

Usando il suggerimento qui sotto, discutere la legge temporale con cui la tensione V_{R_2} passa dal suo valore iniziale al suo valore finale e quindi la legge temporale con cui la corrente che attraversa il condensatore varia dal suo valore massimo a zero.

suggerimento: *il caso di un circuito complesso si riduce al normale processo di carica di un condensatore in serie ad una resistenza equivalente R_{eq}. Nel caso del nostro* *circuito tale resistenza equivalente è data dalla resistenza totale di R_3 in serie con le due resistenze R_1, R_2, che sono tra loro in parallelo, cioè $R_{eq} = R_3 + R_1 \cdot R_2/(R_1+R_2) = 3/2\,R$, visto che sono tutte uguali ad R. Dunque la costante di tempo del circuito sarà ....*

La legge con cui si passerà da $V_{R_2}|_{iniziale}$ a $V_{R_2}|_{finale}$ è determinata dalla legge di carica del condensatore attraverso la resistenza equivalente R_{eq}, discussa sopra. In particolare tensione

$$V_{R_2}(t) = \left[V_{R_2}|_{finale} - (V_{R_2}|_{finale} - V_{R_2}|_{iniziale})\, e^{-t/(R_{eq}\,C)} \right] .$$

Evidentemente $V_{R_2}(t=0) = V_{R_2}|_{iniziale}$ mentre per $t \to \infty$, ovvero per $t \gg R_{eq}C$, $V(t \gg R_{eq}C) \to V_{R_2}|_{finale}$.

La corrente che attraversa il condensatore (diciamo i_3 perché attraversa anche la resistenza R_3) avrà il suo valore massimo ($i_{3,max}$) alla chiusura del circuito, quando il condensatore è ancora scarico. Tale corrente è uguale al rapporto tra la tensione ai capi della coppia di resistenze in parallelo (R_2, R_3), cioè

$$\frac{V_{R_2}|_{iniziale}}{R_3} = i_{3,max} = \frac{1}{3}\frac{V_0}{R} = 2\,\mathrm{mAmpere}\,.$$

La sua legge temporale risulta dunque

$$i_3(t) = i_{3,max}\, e^{-t/R_{eq}C}$$

con $R_{eq}C = 3/2\,R \cdot C = 1.5$ sec.

2.) *Con riferimento al circuito dell'esercizio precedente si studi l'andamento nel tempo del campo magnetico intorno al filo che conduce al condensatore nelle zone esterne al filo, ma così vicine al filo stesso da poterlo assumere di lunghezza praticamente infinita. In particolare si studi il modulo del campo magnetico (in funzione del tempo) facendo un plot del modulo di $B(t)/B_{\mathrm{Max}}$ (dove B_{Max} è il massimo valore assunto dallo stesso campo magnetico).*

Si discutano anche la direzione ed il verso del campo magnetico

Il campo magnetico di un filo molto lungo rispetto alla distanza d dal filo in cui si vuole determinare il campo, circola in maniera tangente alla circonferenza di raggio d ed ortogonale al filo. La direzione di circolazione è fissata dalla regola della mano destra. Il legame tra il modulo del campo magnetico $|\mathbf{B}(t)|$ e la corrente circolante nel filo $i'(t)$ risulta

$$|\mathbf{B}(t)| = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\,i'(t)}{d}$$

quando il punto campo dista d dal filo (si noti che (seguendo il testo) $d > D/2$ se D è il diametro del filo, ovvero il punto dove calcolare il campo è esterno al filo). La corrente

$i'(t)$ varia da un valore massimo, pari alla corrente circolante appena dopo la chiusura del circuito (i'_{max}), a zero, quando il condensatore è carico. La legge è la solita

$$i_3(t) = i_{3,max}\, e^{-t/(R_{eq}C)} = i'_{max}\, e^{-t/(3/2\, RC)} \, .$$

Avremo che

$$i_{3,max} = \frac{V_{R_2}|_{\text{iniziale}}}{R_3} = 2\,\text{mAmpere}$$

dato che R_2 ed R_3 sono in parallelo all'istante iniziale, immediatamente dopo la chiusura del circuito. Inoltre $R_{eq}C = \frac{3}{2} 5000\,\Omega \cdot 200 \cdot 10^{-6}\,F = 1.5$ sec.

Quindi:

$$i_3(t) = i_{3,max}\, e^{-\frac{t}{R_{eq}C}} = 2\,\text{mAmpere}\, e^{-\frac{t(\text{sec})}{1.5\,\text{sec}}} \, .$$

Il (modulo del) campo magnetico risulta quindi

$$|\mathbf{B}(t)| = B_{\text{Max}}\, e^{-\frac{t\,\text{sec}}{1.5\,\text{sec}}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{4}{d} e^{-\frac{t\,(\text{sec})}{1.5\,\text{sec}}}\,\text{Tesla} \;\; .$$

dove $B_{\text{Max}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{4}{d}$ Tesla.

Il verso e la direzione del campo magnetico solo tali che esso circola intorno al filo secondo la regola della mano destra una volta fissati direzione e verso della corrente.

Il diametro del filo non compare nella valutazione del campo magnetico finché il punto dove lo si calcola resta esterno al filo stesso.

3.) *In un dato istante, il campo magnetico di un'onda elettromagnetica piana monocromatica è diretto lungo $-\hat{x}$ (OVEST), mentre il campo elettrico (allo stesso istante) è diretto lungo $\hat{y}$ (NORD). Sapendo che l'intensità trasportata vale $I = 560 \cdot NN/5$ Watt/m^2, derivare:*

i) direzione e verso di propagazione dell'onda;

ii) il valore massimo del campo elettrico; il valore massimo del campo magnetico;

iii) il contributo del campo magnetico e del campo elettrico all'intensità dell'onda;

iv) il numero di fotoni che incidono al secondo su di una superficie perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda se la sua lungheza d'onda vale $\lambda = 500$ nm;

v) l'energia cinetica (in eV) degli elettroni estratti (per effetto fotoelettrico) dall'onda da un catodo il cui lavoro di estrazione vale $W_0 = 2.0$ eV.

soluzione:

i) La direzione di propagazione è la direzione del vettore $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, quindi la direzione $+\hat{z}$, ovvero verso l'alto.

ii) l'intensità dell'onda è data dal valore medio nel tempo del vettore $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ proiettato nella direzione di propagazione, dunque (per $NN = 5$)

$$I = \langle \mathbf{S}\cdot(\hat{z}) \rangle = \frac{1}{\mu_0}\langle |\mathbf{E}(t)||\mathbf{B}(t)| \rangle = \frac{1}{\mu_0}\langle |\mathbf{E}(t)|\frac{|\mathbf{E}(t)|}{c} \rangle = \frac{1}{\mu_0 c}\langle \mathbf{E}^2(t) \rangle = \frac{1}{\mu_0 c}E^2_{qm} = \frac{1}{2\mu_0 c}E^2_0 \, ;$$

uguaglianze giustificate dal fatto che: 1) $\mathbf{E}$ *e* $\mathbf{B}$ *sono ortogonali tra loro e* $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ *giace lungo la direzione di propagazione; 2) il campo magnetico risulta pari al campo elettrico diviso per c (velocità della luce); 3) il valore quadratico medio del campo elettrico* $E_{qm} = \langle \mathbf{E}^2(t)\rangle$ *in un'onda sinusoidale vale la metà del valore massimo* $E_{qm}^2 = E_0^2/2$*.*

Dunque:

$$E_0 = \sqrt{2\frac{\mu_0}{4\pi}4\pi c\, I} \approx 291\,\sqrt{NN}\,\text{Volt/m} \approx 650\,\text{Volt/m}\,;$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} \approx 9.7\cdot 10^{-7}\,\sqrt{NN}\,\text{Tesla} \approx 2.17\cdot 10^{-6}\,\text{Tesla}.$$

iii) L'intesità dell'onda equivale alla sua densità di energia (media) $\langle u\rangle$ *moltiplicata per la sua velocità , c:*

$$I = c\,\langle u\rangle = c\,\langle\left(\frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2\right)\rangle = c\,\langle\left(\frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{\epsilon_0\mu_0}{2\mu_0}\mathbf{E}^2\right)\rangle = c\epsilon_0\langle\mathbf{E}^2\rangle\,;$$

dunque i contributi elettrico e magnetico all'intensità sono uguali, malgrado i loro valori massimi siano molto diversi nelle unità di misura MKSA.

iv) Interpretando l'onda come un insieme di fotoni, ognuno con energia $E_\gamma = hf = \frac{hc}{\lambda}$ *per aver l'intensità* I *ne occorrono* N *al secondo per* m^2

$$I = E_\gamma\cdot N\,,\qquad \to N = \frac{I}{E_\gamma} = \frac{I\lambda}{hc} \approx \frac{NN}{5}1.41\times 10^{21}\,\text{fotoni/sec/m}^2\,,$$

ognuno con energia $E_\gamma \approx 3.98\times 10^{-19}\,\text{Joule} \approx 2.48\ eV$*.*

v) L'energia cinetica del foto-elettrone emesso vale

$$E_c = E_\gamma - W_0 \approx 0.48\,\text{eV}\,.$$