Fisica 2 per biotecnologie: Prova in itinere 8 Aprile 2013

Scrivere immediatamente, <u>ED IN EVIDENZA</u>, sui due fogli protocollo consegnati (ed eventuali altri fogli richiesti) la seguente tabella:

NOME : .... Numero lettere del nome $NN =$ **.................**

COGNOME : .... Numero lettere del Cognome $NC =$ **.................**

NUMERO DI MATRICOLA : .... $= NM$

[esempio: Mario (NN = 5) Careri (NC = 6) matricola 12345 (NM = 12345)]

per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti

(tempo a disposizione 2 ore circa, da precisare dopo la presentazione del testo)

nb: prima di sostituirvi i valori numerici, scrivere (coerentemente con il testo del problema) le formule utilizzate e giustificarle brevemente. Laddove necessario o richiesto, illustrare con semplici figure il procedimento usato.

NON si devono usare LIBRI O APPUNTI.

Tenere a disposizione sul banco un documento di identità .

1.) Calcolare il lavoro necessario per trasportare due cariche (praticamente puntiformi) di valore $Q_1 = NN \cdot 10^{-6}$ Coulomb e $Q_2 = NC \cdot 10^{-6}$ Coulomb, in due punti $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ nei seguenti casi specifici: (distanze in **centimetri**)

i) $x_1 = 0\,; \quad y_1 = 0\,; \quad z_1 = 0\,; \qquad x_2 = 1\,; \quad y_2 = 0\,; \quad z_2 = 0\,.$

ii) $x_1 = 0\,; \quad y_1 = 0\,; \quad z_1 = 0\,; \qquad x_2 = 0\,; \quad y_2 = 1\,; \quad z_2 = 0\,.$

iii) $x_1 = 0\,; \quad y_1 = 0\,; \quad z_1 = 0\,; \qquad x_2 = 1\,; \quad y_2 = 1\,; \quad z_2 = 1\,.$

(Si ricorda che il potenziale $V(\mathbf{r})$ generato da una carica puntiforme q posta all'origine delle coordinate, vale $V(\mathbf{r}) = k_e\, q/r$ dove $r = |\mathbf{r}|$). **(punti 5)**

2.) Un circuito è formato da una batteria che eroga una ddp $V_0 = 2 \cdot NC$ Volt, una resistenza R_1 con in serie una capacità $C = NC$ nF. I due elementi sono in serie a due resistenze (R_2 e R_3) poste in parallelo tra loro (vedi figura alla lavagna). Sia: $R_1 = R_2 = R_3 = NN \cdot 10^6$ Ohm. Ricordando che durante la carica di un condensatore C attraverso un'unica resistenza R, la tensione ai capi del condensatore segue la legge: $V_C(t) = V_0\,(1 - e^{-t/\tau})$ dove $\tau = R \cdot C$ e V_0 è la ddp erogata dalla batteria, trovare nel caso del circuito di figura:

1) il valore di τ ora che sono presenti tre resistenze; **(punti 2)**

2) il valore della tensione $V_C(t)$ ai capi del condensatore dopo tempi $t_1 = \tau$, $t_2 = 3\tau$, $t_3 = 5\tau$ dalla chiusura del circuito; **(punti 3)**

3) la tensione ($V_2(t)$) ai capi della resistenza R_2 e ($V_3(t)$) ai capi della resistenza R_3, in funzione del tempo; **(punti 3)**

4) il valore, in funzione del tempo, del campo elettrico $E(t)$ che si instaura all'interno del condensatore se le sue armature piane sono separate da una distanza $d = 0.1$ mm; in particolare trovare il valore finale (asintotico) E_0 del campo elettrico presente tra le armature; fare una figura di $E(t)$ facendo attenzione alle unità di misura; **(punti 4)**

5) una volta che il condensatore è carico completamente, un elettrone lo attraversa spinto dal campo elettrico asintotico presente. Quanto il lavoro fatto dalle forze elettriche (in Joule ed in eV) nel passare da un'armatura all'altra? **(punti 4)**

3.) Se si sostituisce la batteria dell'esercizio precedente con un generatore di tensione alternata di tipo $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ (con $V_0 = 2 \cdot NC$ Volt) si verifica sperimentalmente che la corrente che circola nel circuito segue la legge $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \phi)$, dove

$$\begin{aligned} i_0 &= \frac{V_0}{\sqrt{R_{eq}^2 + 1/(\omega^2 C^2)}} \\ \tan\phi &= +\frac{1}{\omega R_{eq} C}\,; \end{aligned}$$

dove R_{eq} è la resistenza equivalente del circuito e la frequenza è fissata a $f = NM$ Hz. Che dimensioni ha il prodotto $\omega\, C$? Quanto vale? Quanto vale R_{eq}? Quanto i_0? Quanto ϕ? Dopo quanto tempo (minimo) dall'istante $t = 0$ la tensione $V(t)$ riacquista il valore V_0?**(punti 5)**

In queste condizioni quanto risulta il valore massimo V_R della tensione ai capi della resistenza? Quale il rapporto V_R/V_0? Commentare il risultato.... **(punti 4)**.

(bonus) Scrivere un'espressione per la differenza di potenziale $V_C(t)$ ai capi del condensatore in funzione del tempo. (sarà un'espressione complicata, ma fatta da tutti e soli contributi noti quindi calcolabile per ogni valore del tempo t...) **(punti 6)**.

4.) In una certa zona dello spazio è presente un campo magnetico $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z) = (0, 0, B_0 = 2$ Tesla$)$. Un elettrone che ha velocità $\mathbf{v}_0 = (v_x, v_y, v_z) = (2 \cdot NN \cdot 10^5$ m/sec, 0, 0) entra nella zona di campo magnetico. Quanto varrà la forza (in Newton) esercitata su di esso dal campo magnetico? In che direzione e verso sarà diretta sapendo che vale la relazione: $\mathbf{F}_B = q\,\mathbf{v}_q \times \mathbf{B}$? **(punti 3)** (Se si pensa che questa forza sia piccola, si provi (a casa...) a calcolare il raggio dell'orbita circolare che essa impone all'elettrone, risulterà un'orbita di raggio $R = 2.8 \cdot 10^{-4}$ cm!!!)

Valori utili:
- valore della carica elementare $q_e = 1.602 \times 10^{-19}$ Coulomb;
- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k_e \approx (2.998)^2 \times 10^9$ Newton $\cdot$ m^2 / Coulomb^2 ;

Fisica 2 per biotecnologie
Prova in itinere: 8 Aprile 2013
Soluzione Testo unico

[soluzioni numeriche per i valori dell'esempio:
Mario (NN = 5) Careri (NC = 6) matricola 12345 (NM = 12345)]

1.) *Calcolare il lavoro necessario per trasportare due cariche (praticamente puntiformi) di valore* $Q_1 = NN \cdot 10^{-6}$ *Coulomb e* $Q_2 = NC \cdot 10^{-6}$ *Coulomb, in due punti* $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *e* $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ *nei seguenti casi specifici: (distanze in* **centimetri***)*

i) $x_1 = 0\,; \quad y_1 = 0\,; \quad z_1 = 0\,; \qquad x_2 = 1\,; \quad y_2 = 0\,; \quad z_2 = 0\,.$

Il lavoro fatto per portare in $\mathbf{r}_2$ *la carica* Q_2 *quando sia presente la carica* Q_1 *in* $\mathbf{r}_1$ *è dato dal valore del potenziale elettrico in* $\mathbf{r}_2$ *dovuto alla carica* Q_1*, moltiplicato per* Q_2*, quindi (dato che la carica* Q_1 *è collocata nell'origine delle coordinate)*

$$L = Q_2 \cdot V_1(\mathbf{r}_2) = Q_2 \cdot k_e \frac{Q_1}{|\mathbf{r}_2|} = k_e \frac{Q_2 \cdot Q_1}{|\mathbf{r}_2|} = k_e \frac{Q_2 \cdot Q_1}{d_{12}}$$

dove d_{12}*, è la distanza tra la carica* Q_1 *e la carica* Q_2*.*

Risultato:

$$\begin{aligned} L = k_e \frac{Q_2 \cdot Q_1}{d_{12}} &\approx (2.998)^2 \cdot 10^9 \, \frac{\mathrm{Newton\,m^2}}{\mathrm{Coulomb^2}} \, \frac{NN \cdot NC \cdot 10^{-12}\,\mathrm{Coulomb^2}}{10^{-2}\,\mathrm{m}} = \\ &= (2.998)^2 \cdot NN \cdot NC \cdot 10^{-1}\,\mathrm{Joule} = 26.96\,\mathrm{Joule}\,. \end{aligned}$$

ii) $x_1 = 0\,; \quad y_1 = 0\,; \quad z_1 = 0\,; \qquad x_2 = 0\,; \quad y_2 = 1\,; \quad z_2 = 0\,.$

$$\begin{aligned} L = k_e \frac{Q_2 \cdot Q_1}{d_{12}} &\approx (2.998)^2 \cdot 10^9 \, \frac{\mathrm{Newton\,m^2}}{\mathrm{Coulomb^2}} \, \frac{NN \cdot NC \cdot 10^{-12}\,\mathrm{Coulomb^2}}{10^{-2}\,\mathrm{m}} = \\ &= (2.998)^2 \cdot NN \cdot NC \cdot 10^{-1}\,\mathrm{Joule} = 26.96\,\mathrm{Joule}\,. \end{aligned}$$

(la distanza d_{12}*, è la stessa del punto* **i)***);*

iii) $x_1 = 0\,; \quad y_1 = 0\,; \quad z_1 = 0\,; \qquad x_2 = 1\,; \quad y_2 = 1\,; \quad z_2 = 1\,.$

$$\begin{aligned} L = k_e \frac{Q_2 \cdot Q_1}{d_{12}} &\approx (2.998)^2 \cdot 10^9 \, \frac{\mathrm{Newton\,m^2}}{\mathrm{Coulomb^2}} \, \frac{NN \cdot NC \cdot 10^{-12}\,\mathrm{Coulomb^2}}{\sqrt{3}\,10^{-2}\,\mathrm{m}} = \\ &= \frac{(2.998)^2}{\sqrt{3}} \cdot NN \cdot NC \cdot 10^{-1}\,\mathrm{Joule} \approx 15.57\,\mathrm{Joule}\,. \end{aligned}$$

(dato che la distanza d_{12} *ora vale* $\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$*.*

2.) *Un circuito è formato da una batteria che eroga una ddp* $V_0 = 2 \cdot NC$ *Volt , una resistenza* R_1 *con in serie una capacità* $C = NC$ *nF. I due elementi sono in serie a due resistenze (*R_2 *e* R_3*) poste in parallelo tra loro (vedi figura alla lavagna). sia:* $R_1 = R_2 = R_3 = NN \cdot 10^6$ *Ohm. Ricordando che durante la carica di un condensatore* C *attraverso un'unica resistenza* R*, la tensione ai capi del condensatore segue la legge:* $V_C(t) = V_0\,(1 - e^{-t/\tau})$ *dove* $\tau = R \cdot C$ *e* V_0 *è la ddp erogata dalla batteria, trovare nel caso del circuito di figura:*

1) il valore di τ *ora che sono presenti tre resistenze;*

Il circuito può essere ridotto ad un circuito equivalente con una sola resistenza equivalente R_{eq} *ed una capacità in serie. La resistenza equivalente sarà la resistenza equivalente* R_{23} *delle due resistenze in parallelo,* R_2 *ed* R_3*, e della resistenza in serie alle precedenti,* R_1*; dunque*

$$R_{eq} = R_1 + R_{23} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 1.5\,NN \cdot 10^6 = 7.5\,M\,\mathrm{Ohm}\,.$$

Quindi $\tau = R_{eq} \cdot C = 0.0045$ *sec.*

2) il valore della tensione $V_C(t)$ *ai capi del condensatore dopo tempi* $t_1 = \tau$, $t_2 = 3\tau$, $t_3 = 5\tau$ *dalla chiusura del circuito;*

$$\begin{aligned}
V_C(t = \tau = 0.0045\,sec) &= V_0\left(1 - e^{-\tau/\tau}\right) = V_0\left(1 - e^{-1}\right) = 7.59\,Volt \\
V_C(t = 3\tau = 0.0135\,sec) &= V_0\left(1 - e^{-3\tau/\tau}\right) = V_0\left(1 - e^{-3}\right) = 11.40\,Volt \\
V_C(t = 5\tau = 0.0225\,sec) &= V_0\left(1 - e^{-5\tau/\tau}\right) = V_0\left(1 - e^{-5}\right) = 11.92\,Volt\,;
\end{aligned}$$

3) la tensione ($V_2(t)$*) ai capi della resistenza* R_2 *e (*$V_3(t)$*) ai capi della resistenza* R_3*, in funzione del tempo;*

Le due resistenze sono in parallelo, quindi $V_2(t) = V_3(t)$*, inoltre* $R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$*, ed in* R_{23} *circola la corrente* $i(t)$ *che circola in* R_1 *ed in* C*,*

$$i(t) = \frac{V_0}{R_{eq}}\,e^{-t/\tau} = 1.6 \cdot 10^{-6}\,e^{-t/\tau}\ \ Ampere\,,$$

quindi

$$V_2(t) = V_3(t) = R_{23} \cdot i(t) = R_{23}\,\frac{V_0}{R_{eq}}\,e^{-t/\tau} = 4\,e^{-t/\tau}\ \ Volt\,.$$

4) il valore, in funzione del tempo, del campo elettrico $E(t)$ *che si instaura all'interno del condensatore se le sue armature piane sono separate da una distanza* $d = 0.1$ *mm; in particolare trovare* E_0 *il valore finale (asintotico) del campo elettrico presente tra le armature; fare una figura di* $E(t)$ *facendo attenzione alle unità di misura;*

Il campo elettrico è determinato dalla differenza di potenziale ai capi del condensatore e dalla distanza d delle armature:

$$E(t) = \frac{V_C(t)}{d} = \frac{V_0}{d}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = 1.2 \cdot 10^4 \text{ Volt/metri}\,,$$

quindi il valore asintotico (massimo) del campo elettrico vale

$$E(t \gg \tau) = \frac{V_C(t \gg \tau)}{d} = \frac{V_0}{d} = E_0 = 1.2 \cdot 10^4 \text{ Volt/metri}\,.$$

5) una volta che il condensatore è carico completamente, un elettrone lo attraversa spinto dal campo elettrico asintotico presente. Quanto il lavoro fatto dalle forze elettriche (in Joule ed in eV) nel passare da un'armatura all'altra?

Il lavoro sull'elettrone (in valore assoluto) è pari a

$$L_e = F_E \cdot d = q_e\, E_0 \cdot d = q_e\, V_0 \approx 1.92 \cdot 10^{-18} \text{ Joule} = 12 \text{ eV}\,.$$

3.) *Se si sostituisce la batteria dell'esercizio precedente con un generatore di tensione alternata di tipo $V(t) = V_0\,\cos(\omega\, t) = V_0\,\cos(2\pi f\, t)$ (con $V_0 = 2 \cdot NC$ Volt) si verifica sperimentalmente che la corrente che circola nel circuito segue la legge $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \phi)$, dove*

$$\begin{aligned} i_0 &= \frac{V_0}{\sqrt{R_{eq}^2 + 1/(\omega^2 C^2)}} \\ \tan\phi &= +\frac{1}{\omega R_{eq} C}\,; \end{aligned}$$

dove R_{eq} è la resistenza equivalente del circuito e la frequenza è fissata a $f = NM$ Hz.

Che dimensioni ha il prodotto $\omega\, C$? Quanto vale?

La capacità $C = Q/V$, si misura in Farad, ovvero

$$Farad = \frac{Coulomb}{Volt} = \frac{Ampere}{Volt} sec = \frac{sec}{Ohm}\,,$$

ed è la ragione per cui il prodotto $R_{eq} \cdot C$ è esprimibile in secondi! Inoltre il prodotto ωRC presente nell'espressione per la tangente della fase ϕ risulterà così adimensionale.

$$\omega C = 2\pi f\, C = 2\pi NM\, sec^{-1} \cdot NC \cdot 10^{-9}\, Farad \approx 4.65 \cdot 10^{-4}\; Ohm^{-1}\,.$$

ovvero

$$\frac{1}{\omega C} \approx 2.15 \cdot 10^3 Ohm\,.$$

Quanto vale R_{eq}?

$$R_{eq} = R_1 + R_{23} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 1.5\, NN \cdot 10^6 = 7.5\, M\,\mathrm{Ohm}\,,$$

(vedi esercizio 2).

Quanto i_0? Quanto ϕ?

$$\begin{aligned} i_0 &= \frac{V_0}{\sqrt{R_{eq}^2 + 1/(\omega^2 C^2)}} \approx 1.6 \cdot 10^{-6} Ampere\,, \\ \phi &= \arctan \frac{1}{\omega R_{eq} C} \approx 2.86 \cdot 10^{-4}\ radianti\,. \end{aligned}$$

Dopo quanto tempo (minimo) dall'istante $t = 0$ la tensione $V(t)$ riacquista il valore V_0? Evidentemente dopo un intero periodo di oscillazione della tensione Vt), ovvero

$$T = \frac{1}{f} \approx 8.1 \cdot 10^{-5}\ sec\,.$$

In queste condizioni quanto vale il valore massimo della tensione ai capi della resistenza, V_R? Quale il rapporto V_R/V_0? Commentare il risultato....

$$V_R = R_{eq} \cdot i_0 \approx 12.0\ Volt\,.$$

$$\frac{V_R}{V_0} \approx 1 \text{ !!!}$$

Lo strano risultato dipende dal fatto che con questi valori di capacità e resistenza siamo molto sopra il valore di taglio della frequenza di taglio del filtro passa-alto R_{eq}, C data dalla condizione $\omega R_{eq} C = 1$, ovvero

$$f_{taglio} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R_{eq} C} \approx 3.54\ Hz!!$$

e tutta l'ampiezza in ingresso è riportata in uscita sulla resistenza.

(bonus) *Scrivere un'espressione per la differenza di potenziale $V_C(t)$ ai capi del condensatore in funzione del tempo. (sarà un'espressione complicata, ma fatta da tutti e soli contributi noti quindi calcolabile per ogni valore del tempo t...).*

Il circuito è stato ridotto ad un generatore che alimenta la resistenza equivalente delle tre ed un condensatore in serie a tale resistenza. Si ha:

$$V(t) = V_C(t) + R_{eq}\, i(t)\,,$$

ovvero

$$V_C(t) = V(t) - R_{eq}\, i(t) = V_0 \cos(\omega\, t) - R_{eq} \frac{V_0}{\sqrt{R_{eq}^2 + 1/(\omega^2 C^2)}} \cos(\omega\, t + \phi)\,.$$

Da questa espressione, visto che tutte le quantità e coefficienti sono noti, si può trovare $V_C(t)$ ad ogni istante t fissato.

4.) *In una certa zona dello spazio è presente un campo magnetico* $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z) = (0, 0, B_0 = 2$ *Tesla). Un elettrone che ha velocità* $\mathbf{v}_0 = (v_x, v_y, v_z) = (2 \cdot NN \cdot 10^5$ *m/sec, 0, 0) entra nella zona di campo magnetico. Quanto varrà la forza (in Newton) esercitata su di esso da campo magnetico? in che direzione e verso sarà diretta sapendo che vale la relazione:* $\mathbf{F}_B = q\,\mathbf{v}_q \times \mathbf{B}$*?*

La forza (in modulo) vale

$$F_B = q_e\, v_0 B_0 = 1.602 \cdot 10^{-19}\, Coulomb \cdot 2 \cdot NN \cdot 10^5\, m/sec \cdot 2\, Tesla = 3.2 \cdot 10^{-13}\ Newton.$$

dato che la velocità $\mathbf{v}_0$ *ed il campo magnetico* $\mathbf{B}$ *sono ortogonali tra loro. Direzione e verso della forza sono determinate dalla regola della mano destra, ricordando che la carica dell'elettrone è negativa, quindi alla fine risulterà diretta lungo l'asse positivo* $\hat{y}$*, come si può dedurre anche dal seguente calcolo:*

$$\mathbf{F}_B = q\,\mathbf{v}_q \times \mathbf{B} = -q_e\, v_0\, B_0\, \hat{x} \times \hat{z} = q_e\, v_0\, B_0\, \hat{z} \times \hat{x} = F_B\ \hat{y}\,.$$

Se si pensa che questa forza sia piccola, si provi (a casa...) a calcolare il raggio dell'orbita circolare che essa impone all'elettrone, risulterà un'orbita di raggio $R = 2.8 \cdot 10^{-4}$ *cm!!!*

Infatti

$$R = \frac{m_e v_0}{q_e B_0} \approx 2.8 \cdot 10^{-6}\, metri\,.$$