Fisica 2 per biotecnologie: Prova in itinere 16 Aprile 2012

Scrivere immediatamente, ED IN EVIDENZA, sui due fogli protocollo consegnati (ed eventuali altri fogli richiesti) la seguente tabella:

NOME : .... Numero lettere del nome $NN = $ **.................**

COGNOME : .... Numero lettere del Cognome $NC = $ **.................**

NUMERO DI MATRICOLA : .... $= NM$

[**esempio: Mario (NN = 5) Careri (NC = 6) matricola 12345 (NM = 12345)**]

Testo unico

per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti

(tempo a disposizione 2 ore circa, da precisare dopo la presentazione del testo)

nb: prima di sostituirvi i valori numerici, scrivere (coerentemente con il testo del problema) le formule utilizzate e giustificarle brevemente. Laddove necessario illustrare con semplici figure il procedimento usato.
Non si devono usare libri o appunti.

1.) Calcolare il lavoro necessario per trasportare due cariche (praticamente puntiformi) di valore $Q_1 = NN \cdot 10^{-6}$ Coulomb e $Q_2 = NC \cdot 10^{-6}$ Coulomb, in due punti $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ nei seguenti casi specifici: (distanze in **centimetri**) **(punti 3)**

i) $x_1 = 0\,;\quad y_1 = 0\,;\quad z_1 = 0\,;\qquad x_2 = 1\,;\quad y_2 = 0\,;\quad z_2 = 0\,.$

ii) $x_1 = 0\,;\quad y_1 = 0\,;\quad z_1 = 0\,;\qquad x_2 = 0\,;\quad y_2 = 1\,;\quad z_2 = 0\,.$

iii) $x_1 = 0\,;\quad y_1 = 0\,;\quad z_1 = 0\,;\qquad x_2 = 1\,;\quad y_2 = 1\,;\quad z_2 = 1\,.$

È possibile scrivere una formula generale che comprenda tutti i casi descritti (e descrivibili) dando le coordinate delle due cariche? **(punti 3)**

2.) Una corrente $i = 1$ Ampere, circola in un circuito formato da due resistenze in serie $R_1 = 2 \cdot NN$ Ohm e $R_2 = 2 \cdot NC$ Ohm. Determinare la differenze di potenziale ai capi di R_1 ed R_2. **(punti 2)**. Se la batteria ha una resistenza interna di 1 Ohm, determinare la forza elettromotrice della batteria che alimenta tutto il circuito. Disegnare il circuito. **(punti 3)**

3.) Nel circuito descritto nel precedente esercizio, viene inserito, in serie alle resistenze, un condensatore di capacità 10 μF. Dopo un tempo pari a $t = 10^{-4}$ sec, quanto vale la differenza di potenziale ai capi del condensatore? la carica accumulata sulle piastre del condensatore? la corrente che circola nel circuito? **(punti 5)**

4.) Un filo rettilineo, percorso da corrente $I = 0.1 \cdot NN$ Ampere, ha una lunghezza pari a $L = 8 \cdot NC$ centimetri. Trovare il campo magnetico (determinandone valore assoluto, direzione e verso) in un punto P distante dal punto di mezzo del filo per un lunghezza pari a $NC/10$ cm. Mostrare graficamente i risultati. **(punti 3)**. Come dipende il valore assoluto del campo magnetico dalla lunghezza del filo? Giustificare il risultato. **(punti 3)**

5.) Un solenoide a sezione circolare e dimensioni trasversali molto ridotte rispetto alla sua lunghezza (raggio di base $a = 1$ cm, lunghezza $L = 1$ m) ha $N = NC \cdot 10^3$ spire per metro ed è percorso da una corrente $i = NN/2$ Ampere. Un elettrone lo attraversa passando in un apposita piccolissima apertura, formando un angolo $\vartheta = 30^0$ rispetto alla direzione del campo magnetico interno al solenoide. Descrivere qualitativamente il moto dell'elettrone se confinato all'interno del solenoide.**(punti 3)**. Fissare le condizioni perché il valore della velocità permetta tale confinamento e determinare al meglio la traiettoria dell'elettrone. **(punti 5)**.

6.) **(bonus: facoltativo)** Un circuito formato da una resistenza $R = 10 \cdot NN$ Ohm, è alimentato da un generatore che fornisce una differenza di potenziale $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ alternata ($V_0 = 5 \cdot NC$ Volt, $\omega = 2\pi/T$ con $T = 1/NM$ sec). Sapendo che la corrente $i(t)$ è in fase con la tensione, cioè $i = i_0 \cos(\omega t)$ calcolare (dopo aver fatto il disegno del circuito):

i) il valore di i_0; **(bonus punti 2)**

ii) La potenza media perduta in un periodo T in effetto Joule nel circuito sapendo che la sua definizione è:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T V_R(t) \cdot i(t)\, dt\,,$$

dove $V_R(t)$ è la ddp ai capi della resistenza. **(bonus punti 5)**

Alcune formule rilevanti:

- Il potenziale V generato da una carica puntiforme q posta all'origine delle coordinate, vale
$$V(\mathbf{r}) = k_e \frac{q}{r} \,.$$
- La differenza di potenziale ai capi del condensatore che si sta caricando varia nel tempo (se all'inizio il condensatore era scarico) come $V_c(t) = V_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$, dove V_0 è il valore finale di $V(t)$ e τ la sua costante di tempo.
- Il valore assoluto del campo magnetico di un filo praticamente infinito vale:
$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\,i}{d} \,,$$
dove i è la corrente che vi circola e d la distanza dal filo del punto in cui si vuole calcolare il campo magnetico.
- Il (valore assoluto) del campo magnetico all'interno di un solenoide molto lungo vale:
$$|\mathbf{B}| = \mu_0 \, N \, i \,,$$
dove i è la corrente che circola nelle spire, e N il numero di spire per unità di lunghezza.
- La forza su di una carica q posta in una zona dove sono presenti un campo elettrico $\mathbf{E}$ ed un campo magnetico $\mathbf{B}$ esterni, risulta:
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_B = q\,\mathbf{E} + q\,\mathbf{v}_q \times \mathbf{B} \,,$$
dove $\mathbf{v}_q$ è la velocità della carica q.

Valori utili:

- valore della carica elementare $q_e = 1.602 \times 10^{-19}$ Coulomb;
- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k_e \approx (2.998)^2 \times 10^9$ Newton $\cdot$ m^2 / Coulomb^2 ;
- $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$ Tesla $\cdot$ m/Ampere;
- massa dell'elettrone $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ Kg;
- velocità della luce nel vuoto $c = 2.998 \cdot 10^8$ m/sec.

Fisica 2 per biotecnologie
Prova in itinere: 16 Aprile 2012
Soluzione Testo unico

[soluzioni numeriche per i valori dell'esempio:
Mario (NN = 5) Careri (NC = 6) matricola 12345 (NM = 12345)]

1.) *Calcolare il lavoro necessario per trasportare due cariche (praticamente puntiformi) di valore* $Q_1 = NN \cdot 10^{-6}$ *Coulomb e* $Q_2 = NC \cdot 10^{-6}$ *Coulomb, in due punti* $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *e* $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ *nei seguenti casi specifici: (distanze in* **centimetri***)*

i) $x_1 = 0\,; \quad y_1 = 0\,; \quad z_1 = 0\,; \qquad x_2 = 1\,; \quad y_2 = 0\,; \quad z_2 = 0\,.$

Il lavoro fatto per portare in $\mathbf{r}_2$ *la carica* Q_2 *quando sia presente la carica* Q_1 *in* $\mathbf{r}_1$ *è dato dal valore del potenziale elettrico in* $\mathbf{r}_2$ *dovuto alla carica* Q_1*, moltiplicato per* Q_2*, quindi (dato che la carica* Q_1 *è collocata nell'origine delle coordinate)*

$$L = Q_2 \cdot V_1(\mathbf{r}_2) = Q_2 \cdot k_e \frac{Q_1}{|\mathbf{r}_2|} = k_e \frac{Q_2 \cdot Q_1}{|\mathbf{r}_2|} = k_e \frac{Q_2 \cdot Q_1}{d_{12}}$$

dove d_{12}*, è la distanza tra la carica* Q_1 *e la carica* Q_2 *(come da suggerimento nel paragrafo "alcune formule rilevanti").*

Risultato:

$$\begin{aligned} L = k_e \frac{Q_2 \cdot Q_1}{d_{12}} &\approx (2.998)^2 \cdot 10^9 \, \frac{\text{Newton m}^2}{\text{Coulomb}^2} \, \frac{NN \cdot NC \cdot 10^{-12} \, \text{Coulomb}^2}{10^{-2}\,\text{m}} = \\ &= (2.998)^2 \cdot NN \cdot NC \cdot 10^{-1} \, \text{Joule} = 26.96 \, \text{Joule}\,. \end{aligned}$$

ii) $x_1 = 0\,; \quad y_1 = 0\,; \quad z_1 = 0\,; \qquad x_2 = 0\,; \quad y_2 = 1\,; \quad z_2 = 0\,.$

$$\begin{aligned} L = k_e \frac{Q_2 \cdot Q_1}{d_{12}} &\approx (2.998)^2 \cdot 10^9 \, \frac{\text{Newton m}^2}{\text{Coulomb}^2} \, \frac{NN \cdot NC \cdot 10^{-12} \, \text{Coulomb}^2}{10^{-2}\,\text{m}} = \\ &= (2.998)^2 \cdot NN \cdot NC \cdot 10^{-1} \, \text{Joule} = 26.96 \, \text{Joule}\,. \end{aligned}$$

(la distanza d_{12}*, è la stessa del punto* **i)***);*

iii) $x_1 = 0\,; \quad y_1 = 0\,; \quad z_1 = 0\,; \qquad x_2 = 1\,; \quad y_2 = 1\,; \quad z_2 = 1\,.$

$$\begin{aligned} L = k_e \frac{Q_2 \cdot Q_1}{d_{12}} &\approx (2.998)^2 \cdot 10^9 \, \frac{\text{Newton m}^2}{\text{Coulomb}^2} \, \frac{NN \cdot NC \cdot 10^{-12} \, \text{Coulomb}^2}{\sqrt{3}\,10^{-2}\,\text{m}} = \\ &= \frac{(2.998)^2}{\sqrt{3}} \cdot NN \cdot NC \cdot 10^{-1} \, \text{Joule} \approx 15.57 \, \text{Joule}\,. \end{aligned}$$

(dato che la distanza d_{12} *ora vale* $\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$*;*

È possibile scrivere una formula generale che comprenda tutti i casi descritti (e descrivibili) dando le coordinate delle due cariche? Una formula del tutto generale (anche utilizzata a lezione)

$$L = k_e \frac{Q_2 \cdot Q_1}{d_{12}} = k_e \frac{Q_2 \cdot Q_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = k_e \frac{Q_2 \cdot Q_1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} \,.$$

2.) *Una corrente $i = 1$ Ampere, circola in un circuito formato da due resistenze in serie $R_1 = 2 \cdot NN$ Ohm e $R_2 = 2 \cdot NC$ Ohm. Determinare la differenze di potenziale ai capi di R_1 ed R_2.*

Per la legge di Ohm

$$\begin{aligned} V_1 &= R_1 \cdot i = 2 \cdot NN \,\text{Ohm} \cdot 1\,\text{Ampere} = 2 \cdot NN \,\text{Volt} = 10\,\text{Volt} \\ V_2 &= R_2 \cdot i = 2 \cdot NC \,\text{Ohm} \cdot 1\,\text{Ampere} = 2 \cdot NC \,\text{Volt} = 12\,\text{Volt} \,. \end{aligned}$$

Se la batteria ha una resistenza interna di 1 Ohm, determinare la forza elettromotrice della batteria che alimenta tutto il circuito.

$$f.e.m. = V_0 = (R_{\text{interna}} + R_1 + R_2) \cdot i = (1 + 2 \cdot NN + 2 \cdot NC) \cdot i = (1 + 10 + 12) \cdot 1\,\text{Volt} = 23\,\text{Volt} \,.$$

Disegnare il circuito.

3.) *Nel circuito descritto nel precedente esercizio, viene inserito, in serie alle resistenze, un condensatore di capacità 10 μF. Dopo un tempo pari a $t = 10^{-4}$ sec, quanto vale la differenza di potenziale ai capi del condensatore? la carica accumulata sulle piastre del condensatore? la corrente che circola nel circuito?*

La costante di tempo del circuito vale

$$\tau = (R_{\text{interna}} + R_1 + R_2) \cdot C = (1 + 2 \cdot NN + 2 \cdot NC)\,\text{Ohm} \cdot 10\,\mu\text{F} = 0.23 \cdot 10^{-3}\,\text{sec} \,.$$

Quindi la differenza di potenziale dopo $t = 10^{-4}$ sec, vale (si ricorda che $V_0 = 23$ Volt):

$$V_c(t = 10^{-4}\,\text{sec}) = V_0 \left(1 - e^{-10^{-4}/\tau}\right) = V_0 \left(1 - e^{-0.1/0.23}\right) \approx 8.1\,\text{Volt} \,.$$

La carica accumula vale

$$Q(t = 10^{-4}\,\text{sec}) = C \cdot V_c(t = 10^{-4}\,\text{sec}) \approx 8.1 \cdot 10^{-5}\,\text{Coulomb} \,,$$

e la corrente

$$i(t = 10^{-4}\,\text{sec}) = \left.\frac{dQ(t)}{dt}\right|_{t = 10^{-4}\,\text{sec}} = \frac{C \cdot V_0}{\tau}\, e^{-10^{-4}/\tau} \approx 0.65\,\text{Ampere} \,.$$

4.) *Un filo rettilineo, percorso da corrente $I = 0.1 \cdot NN$ Ampere, ha una lunghezza pari a $L = 8 \cdot NC$ centimetri. Trovare il campo magnetico (determinandone valore assoluto, direzione e verso) in un punto P distante dal punto di mezzo del filo per un lunghezza pari a $d = NC/10$ cm. Mostrare graficamente i risultati. Come dipende il valore assoluto del campo magnetico dalla lunghezza del filo? Giustificare il risultato.*

la lunghezza del filo è molto maggiore della distanza a cui si vuole calcolare il campo magnetico, infatti:

$$\frac{d}{L} = \frac{NC}{10} \cdot \frac{1}{8 \cdot NC} = \frac{1}{80} \ll 1\,,$$

ed il filo può essere pensato come infinito, quindi

$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi}\, 2 \cdot \frac{I}{d} = \left[10^{-7}\frac{\text{Tesla} \cdot \text{m}}{\text{Ampere}}\right] 2 \cdot \frac{0.1 \cdot NN\,\text{Ampere}}{10^{-2}\, NC/10\,\text{m}} \approx 1.67 \cdot 10^{-5}\,\text{Tesla}\,.$$

Il campo $\mathbf{B}$ *circola intorno la filo secondo la regola della mano destra e NON dipende dalla lunghezza del filo SOLO nel limite in cui $d/L \ll 1$.*

5.) *Un solenoide a sezione circolare e dimensioni trasversali molto ridotte rispetto alla sua lunghezza (raggio di base $a = 1$ cm, lunghezza $L = 1$ m) ha $N = NC \cdot 10^3$ spire per metro ed è percorso da una corrente $i = NN/2$ Ampere. Un elettrone lo attraversa passando in un apposita piccolissima apertura, formando un angolo $\vartheta = 30^0$ rispetto alla direzione del campo magnetico interno al solenoide. Descrivere qualitativamente il moto dell'elettrone se confinato all'interno del solenoide. Fissare le condizioni perché il valore della velocità permetta tale confinamento e determinare al meglio la traiettoria dell'elettrone.*

Il campo magnetico, per solenoidi in cui $L \gg a$ (nel caso presente $L/a = 100$), è confinato all'interno del solenoide, parallelo al suo asse e diretto nella direzione fissata dalla regola della mano destra rispetto al senso di circolazione della corrente nelle spire. Il suo valore assoluto è:

$$|\mathbf{B}| = \mu_0\, N\, i = 4\pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{\text{Tesla} \cdot \text{m}}{\text{Ampere}}\right] \frac{NC \cdot 10^3}{\text{m}} \cdot NN/2\,\text{Ampere} \approx 0.019\,\text{Tesla}\,.$$

L'elettrone che attraversa il campo magnetico verrà sollecitato da una forza $\mathbf{F} = q_e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, dove $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel$ perpendicolare e parallela (rispettivamente) al campo magnetico. La componente parallela non è influenzata dal campo che non può esercitare una forza lungo la sua direzione ($\mathbf{v}_\parallel \times \mathbf{B} = 0$). L'elettrone continua imperturbato la sua corsa lungo $\mathbf{B}$. La componente perpendicolare ($\mathbf{v}_\perp$) produce una forza che tende a far compiere all'elettrone un cerchio perpendicolare all'asse del solenoide. Il raggio di questo cerchio risulta dall'uguaglianza della forza magnetica e della forza centripeta necessaria per compiere tale orbita

$$\frac{m_e v_\perp^2}{R} = q_e v_\perp B\,,$$

quindi

$$R = \frac{m_e v_\perp}{q_e B}\,.$$

Ovviamente perché il moto sia confinato all'interno del solenoide deve risultare $R < a$, ovvero

$$\frac{m_e v_\perp}{q_e B} < a\,.$$

La precedente condizione fissa il massimo valore di $v_\perp$ compatibile con il confinamento del moto all'interno del solenoide:

$$v_\perp = |\mathbf{v}| \sin 30^0 < a\,\frac{q_e B}{m_e}\,, \quad \to |\mathbf{v}| < 0.67 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/sec}\,. \tag{1}$$

*Una tale velocità è minore della velocità della luce. L'elettrone resterà confinato all'interno del solenoide solo se possiede velocità inferiori alla (**??**). In caso di intrappolamento, la traiettoria dell'elettrone seguirà una forma elicoidale il cui raggio è quello determinato precedentemente, mentre il suo passo (p) è uguale allo spazio percorso lungo l'asse dall'elettrone mentre compie un giro completo trasversale:*

$$p = v_\parallel \cdot T = v_\parallel \cdot \frac{2\pi R}{v_\perp} = v_\parallel \cdot \frac{2\pi}{v_\perp}\,\frac{m_e v_\perp}{q_e B} = v_\parallel \cdot \frac{2\pi m_e}{q_e B}\,.$$

*Per la velocità limite della (**??**) si ha (si noti che $v_\parallel = |\mathbf{v}| \cos 30^0$):*

$$p \approx 0.67 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/sec} \cdot \cos 30^0 \;\cdot 2\pi \cdot \frac{9.1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{Kg}}{1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{Coulomb}\;\cdot 0.019\,\mathrm{Tesla}} \approx 0.11\,\mathrm{m}\,.$$

6.) **(bonus: facoltativo)** *Un circuito formato da una resistenza $R = 10 \cdot NN$ Ohm, è alimentato da un generatore che fornisce una differenza di potenziale $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ alternata ($V_0 = 5 \cdot NC$ Volt, $\omega = 2\pi/T$ con $T = (1/NM)$ sec). Sapendo che la corrente $i(t)$ è in fase con la tensione, cioè $i = i_0 \cos(\omega t)$ calcolare (dopo aver fatto il disegno del circuito):*

i) *il valore di i_0:*

Vale la legge di Ohm, cioè:

$$i(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{V_0 \cos(\omega t)}{R} = i_0 \cos(\omega t)$$

da cui

$$i_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{5 \cdot NC\,\mathrm{Volt}}{10 \cdot NN\,\mathrm{Ohm}} = 0.6\,\mathrm{Ampere}\,.$$

ii) *La potenza media perduta in un periodo T in effetto Joule nel circuito sapendo che la sua definizione è:*

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T V_R(t) \cdot i(t)\, dt\,,$$

dove $V_R(t)$ è la ddp ai capi della resistenza.

Il circuito comprende una sola resistenza, quindi $V_R(t) = V(t) = \frac{V_0 \cos(\omega t)}{R}$, e l'integrale diviene:

$$\begin{aligned}\langle P\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T V_R(t)\cdot i(t)\,dt = \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_0^2}{R}\cos^2(\omega t)\,dt = \frac{V_0^2}{R}\left[\frac{1}{\omega T}\int_0^{\omega T}\cos^2(\omega t)\,d(\omega t)\right] = \\ &= \frac{V_0^2}{R}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\alpha\,d\alpha\right] = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{R} = \frac{1}{2}\frac{(5\cdot NC\,\mathrm{Volt})^2}{10\cdot NN\,\mathrm{Ohm}} = 9\,\mathrm{Watt}\,,\end{aligned} \tag{2}$$

indipendentemente dal valore della frequenza $f = 1/T = \omega/(2\pi)$.