

Fisica 2 per biotecnologie: Prova in itinere 27 Maggio 2013

Scrivere immediatamente, ED IN EVIDENZA, sui due fogli protocollo consegnati (ed eventuali altri fogli richiesti) la seguente tabella:

NOME : Numero lettere del nome $NN = \dots\dots\dots$

COGNOME : Numero lettere del Cognome $NC = \dots\dots\dots$

NUMERO DI MATRICOLA : = NM

[esempio: Mario (NN = 5) Careri (NC = 6) matricola 12345 (NM = 12345)]

per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti

(tempo a disposizione 2 ore circa, da precisare dopo la presentazione del testo)

nb: prima di sostituirvi i valori numerici, scrivere (coerentemente con il testo del problema) le formule utilizzate e giustificarle brevemente. Laddove necessario o richiesto, illustrare con semplici figure il procedimento usato.

È utilizzabile il libro di testo.

Tenere a disposizione sul banco un documento di identità .

- 1.) I fotoni emessi da un a gas di idrogeno riscaldato sono selezionati in modo da avere a disposizione un fascio di radiazione dovuta alle sole transizioni dallo stato con $n = 4$ a $n = 2$ (E_{42}) e dallo stato $n = 2$ allo stato $n = 1$ (E_{21}). Dimostrare che $E_{42} \approx 2.55$ eV e $E_{21} \approx 10.2$ eV (**punti 2**) e che le lunghezze d'onda dei fotoni emessi valgono rispettivamente $\lambda_{42} \approx 4867 \text{ \AA}$ e $\lambda_{21} \approx 1217 \text{ \AA}$ (**punti 3**). I fotoni emessi incidono su di un metallo il cui lavoro di estrazione per poter estrarre un elettrone vale $W_0 = 2$ eV. Quanto valgono le energie cinetiche degli elettroni emessi? (**punti 3**) e le loro velocità? (**punti 4**) Che differenza di potenziale deve essere stabilita perché gli elettroni uscenti dal catodo metallico non raggiungano l'anodo (potenziale di arresto)? L'anodo deve risultare positivo o negativo? (discutere la risposta) (**punti 3**)
- - (totale **punti** esercizio = 15)

- 2.) In un secondo esperimento gli stessi fotoni prodotti dal gas di idrogeno nelle transizioni discusse sopra, vengono utilizzati per un interferometro Young a due fenditure distanti $d = NC \mu\text{m}$ e raccolti in uno schermo lontano 70 cm dalle fenditure. Trovare le posizioni dei primi massimi prodotti sullo schermo (**punti 3**). Se lo schermo è raggiunto (nella zona dei due massimi) da circa $NC \cdot 10^7$ fotoni al secondo per cm^2 , quanto vale l'intensità del segnale nei due punti in Watt/m^2 (**punti 3**)? e quanto il valore massimo del campo elettrico dovuto alla radiazione, nei due punti (**punti 3**)?
- - (totale **punti** esercizio = 9)

- 3.) Un campione di $NM/100$ grammi di Carbonio di origine animale (materiale osseo) è noto avere un'età di circa 10000 anni. Quale sarà la sua attività dovuta alla pre-

senza di ^{14}C (**punti 3**)? Discutere quanto vale il valore massimo dell'energia cinetica dell'elettrone emesso nel decadimento beta del nucleo di ^{14}C . (**punti 6**)?

- - (totale **punti** esercizio = 9)

4.) (**bonus**) Stimare l'energia vibrazionale degli atomi di carbonio in un diamante supponendo che le vibrazioni siano ristrette a circa $1/10$ di Å. (Utilizzare per la stima l'energia dello stato fondamentale di una particella in una buca rigida di potenziale, in una dimensione $E_1 = h^2/(8mL^2)$).

- - (totale **punti** esercizio = 6)

- - - (totale **punti** della prova = 39)

Fisica 2 per biotecnologie
Prova in itinere: 27 Maggio 2013
Soluzione Testo unico

[soluzioni numeriche per i valori dell'esempio:

Mario (NN = 5) Careri (NC = 6) matricola 12345 (NM = 12345)]

- 1.) I fotoni emessi da un gas di idrogeno riscaldato sono selezionati in modo da avere a disposizione un fascio di radiazione dovuta alle sole transizioni dallo stato con $n = 4$ a $n = 2$ (E_{42}) e dallo stato $n = 2$ allo stato $n = 1$ (E_{21}). Dimostrare che $E_{42} \approx 2.55$ eV e $E_{21} \approx 10.2$ eV (**punti 2**) e che le lunghezze d'onda dei fotoni emessi valgono rispettivamente $\lambda_{42} \approx 4867 \text{ \AA}$ e $\lambda_{21} \approx 1217 \text{ \AA}$ (**punti 3**).

L'atomo d'idrogeno è descritto dal modello di Bohr e lo spettro di energie risulta

$$E_n = -\frac{E_1}{n^2}$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$ e $E_1 \approx 13.6$ eV (energia di ionizzazione dello stato fondamentale).
Quindi

$$E_{42} = E_4 - E_2 = E_1 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) = \frac{3}{16} \cdot 13.6 \text{ eV} \approx 2.55 \text{ eV};$$
$$E_{21} = E_2 - E_1 = E_1 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} \cdot 13.6 \text{ eV} \approx 10.2 \text{ eV}.$$

Le lunghezze d'onda dei fotoni emessi:

$$\lambda_{42} = \frac{hc}{E_{42}} \approx \frac{12.41 \cdot 10^3 \text{ eV \AA}}{2.55 \text{ eV}} \approx 4867 \text{ \AA};$$
$$\lambda_{21} = \frac{hc}{E_{21}} \approx \frac{12.41 \cdot 10^3 \text{ eV \AA}}{10.2 \text{ eV}} \approx 1217 \text{ \AA}.$$

I fotoni emessi incidono su di un metallo il cui lavoro di estrazione per poter estrarre un elettrone vale $W_0 = 2$ eV. Quanto valgono le energie cinetiche degli elettroni emessi (**punti 3**)? e le loro velocità (**punti 4**)?

$$E_{k42} = \frac{1}{2} m_e v_{42}^2 = \frac{hc}{\lambda_{42}} - W_0 \approx 2.55 \text{ eV} - 2.0 \text{ eV} = 0.55 \text{ eV};$$
$$E_{k21} = \frac{1}{2} m_e v_{21}^2 = \frac{hc}{\lambda_{21}} - W_0 \approx 10.2 \text{ eV} - 2.0 \text{ eV} = 8.20 \text{ eV}.$$

$$|\mathbf{v}_{42}| = \sqrt{\frac{2 E_{k42}}{m_e}} \approx 4.4 \cdot 10^5 \text{ m/sec};$$

$$|\mathbf{v}_{21}| = \sqrt{\frac{2 E_{k21}}{m_e}} \approx 1.7 \cdot 10^6 \text{ m/sec}.$$

Che differenza di potenziale deve essere stabilita perché gli elettroni uscenti dal catodo metallico non raggiungano l'anodo (potenziale di arresto)? L'anodo deve risultare positivo o negativo? (discutere la risposta) (**punti 3**)

$$V_{A42} = E_{k42}/q_e \approx 0.55 \text{ Volt};$$

$$V_{A21} = E_{k21}/q_e \approx 8.20 \text{ Volt};$$

L'anodo deve essere negativo per esercitare una forza repulsiva sugli elettroni ed arrestarne il moto.

- - (totale **punti** esercizio = 15)

- 2.) In un secondo esperimento gli stessi fotoni prodotti dal gas di idrogeno nelle transizioni discusse sopra, vengono utilizzati per un interferometro Young a due fenditure distanti $d = NC \mu\text{m}$ e raccolti in uno schermo lontano 70 cm dalle fenditure. Trovare le posizioni dei primi massimi prodotti sullo schermo (**punti 3**).

L'angolo di deviazione relativo all'ordine n dello spettro soddisfa la relazione

$$d \sin \vartheta = n\lambda$$

e la distanza dal centro dello spettro

$$x_n = L \tan \vartheta \approx L \frac{n\lambda}{d}$$

dove $L = 70 \text{ cm}$ è la distanza delle fenditure dallo schermo e la formula vale nell'approssimazione $\sin \vartheta \approx \tan \vartheta$ (piccoli angoli). Quindi, per $n = 1$,

$$x_{1,42} \approx L \frac{\lambda_{42}}{d} \approx 5.7 \text{ cm};$$

$$x_{1,21} \approx L \frac{\lambda_{21}}{d} \approx 1.4 \text{ cm}.$$

Se lo schermo è raggiunto (nella zona dei due massimi) da circa $NC \cdot 10^7$ fotoni al secondo per cm^2 , quanto vale l'intensità del segnale nei due punti in Watt/m^2 (**punti 3**)? Ricordando che l'energia dei fotoni $E_{\gamma 42} \equiv E_{42}$, $E_{\gamma 21} \equiv E_{21}$:

$$I_{42} = NC \cdot 10^7 \cdot E_{42} \approx 6 \cdot 10^7 \text{ fotoni/sec} \cdot 2.55 \text{ eV} \approx 2.45 \cdot 10^{-7} \text{ Watt}/\text{m}^2;$$

$$I_{21} = NC \cdot 10^7 \cdot E_{21} \approx 6 \cdot 10^7 \text{ fotoni/sec} \cdot 10.2 \text{ eV} \approx 9.80 \cdot 10^{-7} \text{ Watt}/\text{m}^2.$$

e quanto il valore massimo del campo elettrico dovuto alla radiazione, nei due punti (**punti 3**)?

Siccome l'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza del campo elettrico,
 $I = \epsilon_0 E_0^2 c/2$,

$$E_{0,42} = \sqrt{2 I_{42}/(c \epsilon_0)} \approx 0.014 \text{ Volt/m};$$

$$E_{0,21} = \sqrt{2 I_{21}/(c \epsilon_0)} \approx 0.027 \text{ Volt/m}.$$

- - (totale **punti** esercizio = 9)

- 3.)** Un campione di $NM/100$ grammi di Carbonio di origine animale (materiale osseo) è noto avere un'età di circa 10000 anni. Quale sarà la sua attività OGGI dovuta alla presenza di ^{14}C (**punti 3**)?

Il numero di atomi di ^{14}C presenti 10000 fa risulta (approssimando a 12 grammi la mole di Carbonio a $1.3 \cdot 10^{-12}$ la frazione di ^{14}C presente nel campione vivo ed indicando con N_A il numero di Avogadro)

$$N_0 = \frac{NM/100 \text{ grammi}}{12 \text{ grammi}} \cdot N_A \cdot 1.3 \cdot 10^{-12} \approx 8.05 \cdot 10^{12};$$

e l'attività a 10000 anni fa ($t = 0$)

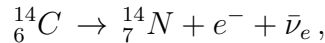
$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{t=0} = N_0 \lambda = N_0 \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \approx 30.9 \text{ disintegrazioni/sec},$$

dato che $T_{1/2} = 5730 \text{ anni} \approx 5730 \cdot 3.156 \cdot 10^7 \text{ sec}$. L'attività dopo un tempo di $t^* = 10000 \text{ anni}$, risulta

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{t=t^*} = \left. \frac{dN}{dt} \right|_{t=0} \cdot e^{-\lambda t^*} \approx 9.2 \text{ disintegrazioni al secondo}.$$

Quanto vale il valore massimo dell'energia cinetica dell'elettrone emesso nel decadimento beta del nucleo di ^{14}C (**punti 6**)?

Il decadimento è di tipo beta



quindi l'energia (cinetica) a disposizione del sistema elettrone, neutrino è dato dalla differenza delle masse (**atomiche**, che comprendono anche la massa dell'elettrone in eccesso visto che il Carbonio ne ha sei, mentre l'Azoto 7)

$$M_{^{14}\text{C}}c^2 - M_{^{14}\text{N}}c^2 \approx (14.003242 - 14.003074) \cdot 931.5 \text{ MeV/amu} \approx 0.156 \text{ MeV},$$

dove si sono utilizzate le masse atomiche dell'Azoto e del Carbonio e la conversione tra unità di massa atomica ed i Mega-elettron-Volt ($1 \text{ amu} \approx 931.5 \text{ MeV}$).

In verità questa energia a disposizione va in parte anche in energia cinetica dell'Azoto, che può essere trascurata data la massa enorme rispetto all'elettrone. In ogni caso, tenendo conto del rinculo dell'Azoto, l'energia a disposizione del sistema neutrino-elettrone risulterebbe (leggermente) più bassa ed il problema chiede una stima dell'estremo superiore di energia cinetica dell'elettrone...

- - (totale **punti** esercizio = 9)

- 4.) (**bonus**) Stimare l'energia vibrazionale degli atomi di carbonio in un diamante supponendo che le vibrazioni siano ristrette a circa $1/10$ di Å. (Utilizzare per la stima l'energia dello stato fondamentale di una particella in una buca rigida di potenziale, in una dimensione $E_1 = h^2/(8mL^2)$).

Per stimare le energie vibrazionali occorre sapere la massa dell'atomo di Carbonio. Assumendo che la mole sia di 12 grammi,

$$m = \frac{12 \text{ gr}}{N_A} \approx 1.99 \cdot 10^{-23} \text{ gr} = 1.99 \cdot 10^{-26} \text{ Kg}.$$

Ne segue (se $L = 1/10 \text{ Å}$)

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} \approx 2.75 \cdot 10^{-20} \text{ Joule} \approx 0.17 \text{ eV}.$$

- - (totale **punti** esercizio = 6)

- - - (totale **punti** della prova = 39)