Fisica 2 per biotecnologie: Prova scritta 3 Febbraio 2014

Scrivere immediatamente, ED IN EVIDENZA, sui due fogli protocollo consegnati (ed eventuali altri fogli richiesti) la seguente tabella:

NOME : .... Numero lettere del nome $NN =$ **..................**

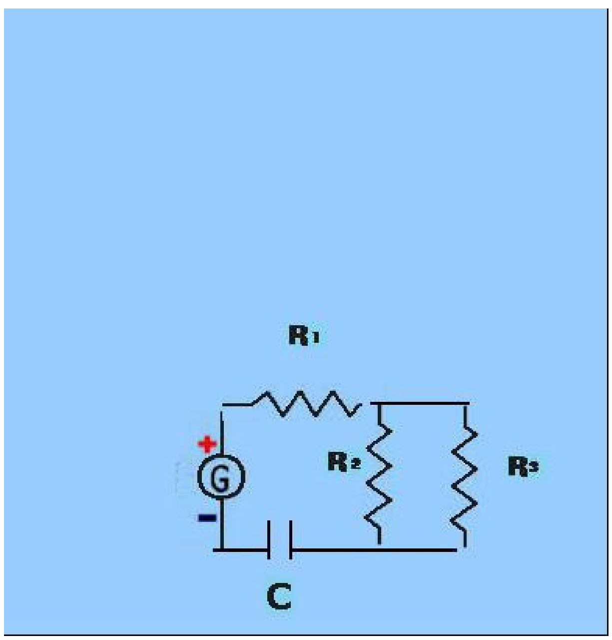
COGNOME : .... Numero lettere del Cognome $NC =$ **..................**

NUMERO DI MATRICOLA : .... $= NM$
[esempio: Mario (NN = 5) Careri (NC = 6) matricola 123456 (NM = 123456)]

Testo unico

nb: prima di sostituirvi i valori numerici, scrivere (coerentemente con il testo del problema) le formule utilizzate e **giustificarle brevemente**. Laddove necessario o richiesto, illustrare con semplici figure il procedimento usato.
È utilizzabile il libro di testo, anche per conoscere quantità necessarie per la risoluzione dei problemi. Tenere a disposizione sul banco un documento di identità .
Questo foglio NON va restituito.

per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti



1.) Un circuito è formato da un generatore (G) che eroga una differenza di potenziale $V_0 = 2 \cdot NC$ Volt, una resistenza R_1 con in serie una capacità $C = NC$ nF. I due elementi sono in serie a due resistenze (R_2 e R_3) poste in parallelo tra loro (vedi figura). Sia: $R_1 = R_2 = R_3 = NN \cdot 10^6$ Ohm. Ricordando che durante la carica di un condensatore C attraverso un'unica resistenza R, la tensione ai capi del condensatore segue la legge: $V_C(t) = V_0\,(1-e^{-t/\tau})$ dove $\tau = R\cdot C$ e V_0 è la ddp erogata dalla batteria, trovare nel caso del circuito di figura:

1) il valore di τ ora che sono presenti tre resistenze; **(punti 2)**

2) la tensione ($V_2(t)$) ai capi della resistenza R_2 e ($V_3(t)$) ai capi della resistenza R_3, in funzione del tempo; **(punti 3)**

3) il valore, in funzione del tempo, del campo elettrico $E(t)$ che si instaura all'interno del condensatore se le sue armature piane sono separate da una distanza $d = 0.1$ mm; in particolare trovare il valore finale (asintotico) E_0 del campo elettrico presente tra le armature; fare una figura di $E(t)$ facendo attenzione alle unità di misura. **(punti 4)**
- - (totale **punti** esercizio = 9)

2.) In una certa zona dello spazio è presente un campo magnetico $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z) = (0, 0, B_0 = 2$ Tesla). Un elettrone che ha velocità $\mathbf{v}_0 = (v_x, v_y, v_z) = (2\cdot NN\cdot 10^5$ m/sec, 0, 0) entra nella zona di campo magnetico. Quanto varrà la forza (in Newton) esercitata su di esso dal campo magnetico nel momento in cui entra nel campo magnetico? In che direzione e verso sarà diretta sapendo che vale la relazione: $\mathbf{F}_B = q\,\mathbf{v}_q \times \mathbf{B}$? **(punti 3)**

Se si pensa che questa forza sia piccola, si provi a calcolare il raggio dell'orbita circolare che essa impone all'elettrone, **(punti 4)** risulterà un'orbita di raggio $R = 2.8\cdot 10^{-4}$ cm!!!
- - (totale **punti** esercizio = 7)

3.) I fotoni emessi da un a gas di idrogeno riscaldato sono selezionati in modo da avere a disposizione un fascio di radiazione dovuta alle sole transizioni dallo stato con $n = 4$ a $n = 2$ (E_{42}) e dallo stato $n = 2$ allo stato $n = 1$ (E_{21}). Dimostrare che $E_{42} \approx 2.55$ eV e $E_{21} \approx 10.2$ eV (**punti** 2) e che le lunghezze d'onda dei fotoni emessi valgono rispettivamente $\lambda_{42} \approx 4867$ Å e $\lambda_{21} \approx 1217$ Å (**punti** 3). I fotoni emessi incidono su di un metallo il cui lavoro di estrazione per poter estrarre un elettrone vale $W_0 = 2$ eV. Quanto valgono le energie cinetiche degli elettroni emessi? (**punti** 3) e le loro velocità ? (**punti** 4)
- - (totale **punti** esercizio = 10)

4.) In un secondo esperimento gli stessi fotoni prodotti dal gas di idrogeno nelle transizioni discusse sopra, vengono utilizzati per un interferometro Young a due fenditure distanti $d = NC\,\mu$m e raccolti in uno schermo lontano 70 cm dalle fenditure. Trovare le posizioni dei primi massimi prodotti sullo schermo (**punti** 3). Se lo schermo è raggiunto (nella zona dei due massimi) da circa $NC\cdot 10^7$ fotoni al secondo per cm^2, quanto vale l'intensità del segnale nei due punti in Watt/m^2 (**punti** 3)? e quanto il valore massimo del campo elettrico dovuto alla radiazione, nei due punti (**punti** 3)?
- - (totale **punti** esercizio = 9)

totale punti: 35

Fisica 2 per biotecnologie
Prova scritta: 3 Febbraio 2014
Soluzione Testo unico
per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti

[soluzioni numeriche per i valori dell'esempio:
Mario (NN = 5) Careri (NC = 6) matricola 12345 (NM = 12345)]

1.) *Un circuito è formato da una batteria che eroga una differenza di potenziale $V_0 = 2 \cdot NC$ Volt, una resistenza R_1 con in serie una capacità $C = NC$ nF. I due elementi sono in serie a due resistenze (R_2 e R_3) poste in parallelo tra loro (vedi figura alla lavagna). Sia: $R_1 = R_2 = R_3 = NN \cdot 10^6$ Ohm. Ricordando che durante la carica di un condensatore C attraverso un'unica resistenza R, la tensione ai capi del condensatore segue la legge: $V_C(t) = V_0\,(1 - e^{-t/\tau})$ dove $\tau = R \cdot C$ e V_0 è la ddp erogata dalla batteria, trovare nel caso del circuito di figura:*

1) il valore di τ ora che sono presenti tre resistenze;

Il circuito può essere ridotto ad un circuito equivalente con una sola resistenza equivalente R_{eq} ed una capacità in serie. La resistenza equivalente sarà la resistenza equivalente R_{23} delle due resistenze in parallelo, R_2 ed R_3, e della resistenza in serie alle precedenti, R_1; dunque

$$R_{eq} = R_1 + R_{23} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 1.5\,NN \cdot 10^6 = 7.5\,M\,\mathrm{Ohm}\,.$$

Quindi $\tau = R_{eq} \cdot C = 0.0045$ sec.

2) la tensione ($V_2(t)$) ai capi della resistenza R_2 e ($V_3(t)$) ai capi della resistenza R_3, in funzione del tempo;

Le due resistenze sono in parallelo, quindi $V_2(t) = V_3(t)$, inoltre $R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$, ed in R_{23} circola la corrente $i(t)$ che circola in R_1 ed in C,

$$i(t) = \frac{V_0}{R_{eq}}\,e^{-t/\tau} = 1.6 \cdot 10^{-6}\,e^{-t/\tau}\ \mathit{Ampere}\,,$$

quindi

$$V_2(t) = V_3(t) = R_{23} \cdot i(t) = R_{23}\,\frac{V_0}{R_{eq}}\,e^{-t/\tau} = 4\,e^{-t/\tau}\ Volt\,.$$

3) il valore, in funzione del tempo, del campo elettrico $E(t)$ che si instaura all'interno del condensatore se le sue armature piane sono separate da una distanza $d = 0.1$ mm; in particolare trovare E_0 il valore finale (asintotico) del campo elettrico presente tra le armature; fare una figura di $E(t)$ facendo attenzione alle unità di misura;

Il campo elettrico è determinato dalla differenza di potenziale ai capi del condensatore e dalla distanza d delle armature:

$$E(t) = \frac{V_C(t)}{d} = \frac{V_0}{d}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = 1.2 \cdot 10^4 \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{Volt/metro}\,,$$

quindi il valore asintotico (massimo) del campo elettrico vale

$$E(t \gg \tau) = \frac{V_C(t \gg \tau)}{d} = \frac{V_0}{d} = E_0 = 1.2 \cdot 10^4 \text{ Volt/metro}\,.$$

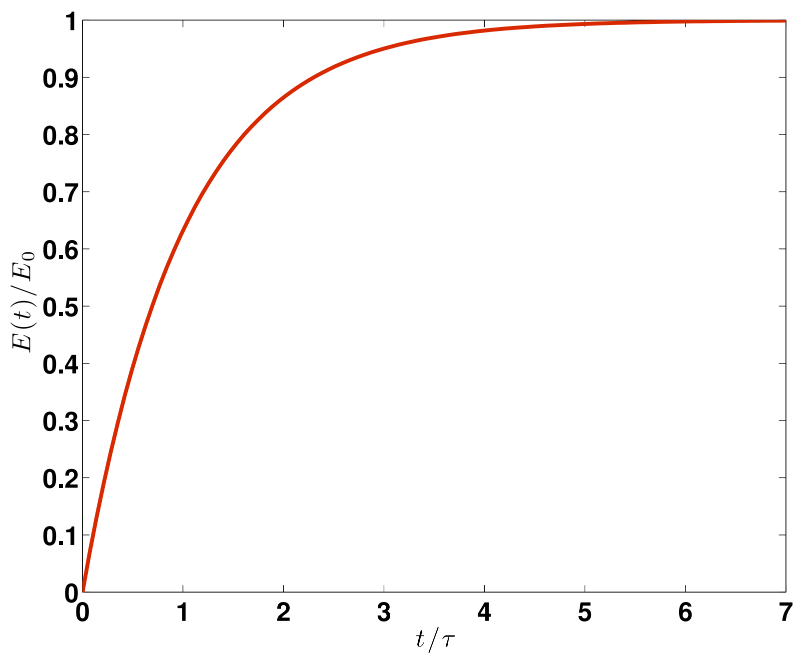


Figure 1: Il modulo del campo elettrico $E(t)$ all'interno del condensatore, diviso per il suo valore massimo (asintotico) E_0 in funzione del tempo. Meglio in funzione del rapporto adimensionale $x = t/\tau$. In questo modo si ottiene la funzione universale $f(x) = (1 - e^{-x})$. Si scopre che per $x \approx 5$ la funzione raggiunge praticamente il suo valore asintotico, ovvero quando $t \approx 5 \cdot \tau$, come abbiamo sempre usato in laboratorio.

2.) *In una certa zona dello spazio è presente un campo magnetico $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z) = (0, 0, B_0 = 2$ Tesla). Un elettrone che ha velocità $\mathbf{v}_0 = (v_x, v_y, v_z) = (2 \cdot NN \cdot 10^5$ m/sec, 0, 0) entra nella zona di campo magnetico. Quanto varrà la forza (in Newton) esercitata su di esso dal campo magnetico nel momento in cui entra nel campo magnetico? In che direzione e verso sarà diretta sapendo che vale la relazione: $\mathbf{F}_B = q\,\mathbf{v}_q \times \mathbf{B}$?*

La forza (in modulo) vale

$$F_B = q_e\, v_0 B_0 = 1.602 \cdot 10^{-19}\, Coulomb \cdot 2 \cdot NN \cdot 10^5\, m/sec \cdot 2\, Tesla = 3.2 \cdot 10^{-13}\ Newton\,,$$

dato che la velocità $\mathbf{v}_0$ *ed il campo magnetico* $\mathbf{B}$ *sono ortogonali tra loro. Direzione e verso della forza sono determinate dalla regola della mano destra, ricordando che la carica dell'elettrone è negativa, quindi alla fine risulterà diretta lungo l'asse positivo* $\hat{y}$*, come si può dedurre anche dal seguente calcolo:*

$$\mathbf{F}_B = q\,\mathbf{v}_q \times \mathbf{B} = -q_e\,v_0\,B_0\,\hat{x} \times \hat{z} = q_e\,v_0\,B_0\,\hat{z} \times \hat{x} = F_B\;\hat{y}\,.$$

Se si pensa che questa forza sia piccola, si provi a calcolare il raggio dell'orbita circolare che essa impone all'elettrone, risulterà un'orbita di raggio $R = 2.8 \cdot 10^{-4}$ *cm!!!*

Infatti

$$R = \frac{m_e v_0}{q_e B_0} \approx 2.8 \cdot 10^{-6}\,metri\,.$$

3.) *I fotoni emessi da un a gas di idrogeno riscaldato sono selezionati in modo da avere a disposizione un fascio di radiazione dovuta alle sole transizioni dallo stato con* $n = 4$ *a* $n = 2$ *(*E_{42}*) e dallo stato* $n = 2$ *allo stato* $n = 1$ *(*E_{21}*). Dimostrare che* $E_{42} \approx 2.55$ *eV e* $E_{21} \approx 10.2$ *eV e che le lunghezze d'onda dei fotoni emessi valgono rispettivamente* $\lambda_{42} \approx 4867\ \mathring{A}$ *e* $\lambda_{21} \approx 1217\ \mathring{A}$.

L'atomo d'idrogeno è descritto dal modello di Bohr e lo spettro di energie risulta

$$E_n = -\frac{E_1}{n^2}\,,$$

dove $n = 1, 2, 3...$ *e* $E_1 \approx 13.6$ *eV (energia di ionizzazione dello stato fondamentale). Quindi*

$$\begin{aligned} E_{42} &= E_4 - E_2 = E_1\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right) = \frac{3}{16} \cdot 13.6\,eV \approx 2.55\,eV\,; \\ E_{21} &= E_2 - E_1 = E_1\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4} \cdot 13.6\,eV \approx 10.2\,eV\,. \end{aligned}$$

Le lunghezze d'onda dei fotoni emessi:

$$\begin{aligned} \lambda_{42} &= \frac{hc}{E_{42}} \approx \frac{12.41 \cdot 10^3\,eV\,\mathring{A}}{2.55\,eV} \approx 4867\,\mathring{A}\,; \\ \lambda_{21} &= \frac{hc}{E_{21}} \approx \frac{12.41 \cdot 10^3\,eV\,\mathring{A}}{10.2\,eV} \approx 1217\,\mathring{A}\,. \end{aligned}$$

I fotoni emessi incidono su di un metallo il cui lavoro di estrazione per poter estrarre un elettrone vale $W_0 = 2$ *eV. Quanto valgono le energie cinetiche degli elettroni emessi? e le loro velocità '*

$$
\begin{aligned}
E_{k42} &= \frac{1}{2} m_e \mathbf{v}_{42}^2 = \frac{hc}{\lambda_{42}} - W_0 \approx 2.55\,eV - 2.0\,eV = 0.55\,eV\,; \\
E_{k21} &= \frac{1}{2} m_e \mathbf{v}_{21}^2 = \frac{hc}{\lambda_{21}} - W_0 \approx 10.2\,eV - 2.0\,eV = 8.20\,eV\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{v}_{42}| &= \sqrt{\frac{2\,E_{k42}}{m_e}} \approx 4.4 \cdot 10^5\, m/sec\,; \\
|\mathbf{v}_{21}| &= \sqrt{\frac{2\,E_{k21}}{m_e}} \approx 1.7 \cdot 10^6\, m/sec\,.
\end{aligned}
$$

4.) *In un secondo esperimento gli stessi fotoni prodotti dal gas di idrogeno nelle transizioni discusse sopra, vengono utilizzati per un interferometro Young a due fenditure distanti $d = NC\,\mu m$ e raccolti in uno schermo lontano 70 cm dalle fenditure. Trovare le posizioni dei primi massimi prodotti sullo schermo.*

L'angolo di deviazione relativo all'ordine n dello spettro soddisfa la relazione

$$
d \sin\vartheta = n\lambda
$$

e la distanza dal centro dello spettro

$$
x_n = L \tan\vartheta \approx L\,\frac{n\lambda}{d}
$$

dove $L = 70$ cm è la distanza delle fenditure dallo schermo e la formula vale nell'appros= simazione $\sin\vartheta \approx \tan\vartheta$ (piccoli angoli). Quindi, per $n = 1$,

$$
\begin{aligned}
x_{1,42} &\approx L\,\frac{\lambda_{42}}{d} \approx 5.7\,cm\,; \\
x_{1,21} &\approx L\,\frac{\lambda_{21}}{d} \approx 1.4\,cm\,.
\end{aligned}
$$

Se lo schermo è raggiunto (nella zona dei due massimi) da circa $NC \cdot 10^7$ fotoni al secondo per cm^2, quanto vale l'intensità del segnale nei due punti in Watt/m^2? Ricordando che l'energia dei fotoni $E_{\gamma 42} \equiv E_{42}$, $E_{\gamma 21} \equiv E_{21}$:

$$
\begin{aligned}
I_{42} &= NC \cdot 10^7 \cdot E_{42} \approx 6 \cdot 10^7 fotoni/sec \cdot 2.55\,eV \approx 2.45 \cdot 10^{-7}\, Watt/m^2\,; \\
I_{21} &= NC \cdot 10^7 \cdot E_{21} \approx 6 \cdot 10^7 fotoni/sec \cdot 10.2\,eV \approx 9.80 \cdot 10^{-7}\, Watt/m^2\,.
\end{aligned}
$$

e quanto il valore massimo del campo elettrico dovuto alla radiazione, nei due punti?

Siccome l'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza del campo elettrico, $I = \epsilon_0 \, E_0^2 \, c/2$,

$$\begin{aligned} E_{0,42} &= \sqrt{2\, I_{42}/(c\, \epsilon_0)} \approx 0.014 \, Volt/m \, ; \\ E_{0,21} &= \sqrt{2\, I_{21}/(c\, \epsilon_0)} \approx 0.027 \, Volt/m \, . \end{aligned}$$