

Fisica 2 per biotecnologie: Prova scritta 8 Gennaio 2014

Scrivere immediatamente, ED IN EVIDENZA, sui due fogli protocollo consegnati (ed eventuali altri fogli richiesti) la seguente tabella:

NOME : Numero lettere del nome $NN = \dots\dots\dots$

COGNOME : Numero lettere del Cognome $NC = \dots\dots\dots$

NUMERO DI MATRICOLA : = NM

[esempio: Mario (NN = 5) Careri (NC = 6) matricola 123456 (NM = 123456)]

Testo unico

nb: prima di sostituirvi i valori numerici, scrivere (coerentemente con il testo del problema) le formule utilizzate e **giustificarle brevemente**. Laddove necessario o richiesto, illustrare con semplici figure il procedimento usato.

È utilizzabile il libro di testo, anche per conoscere quantità necessarie per la risoluzione dei problemi. Tenere a disposizione sul banco un documento di identità .

Questo foglio NON va restituito.

per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti

- 1.) Tra la terra ed una nuvola di superficie $NC/3 \times 10^2 \text{ Km}^2$ e a distanza di (circa) 1500 m dal suolo, la differenza di potenziale instaurata vale (circa) $3.5 \cdot 10^7 \text{ Volt}$. Calcolare la capacità del sistema "condensatore" Terra-nuvola **discutendo le approssimazioni necessarie**. Quanta carica viene accumulata? Quanta energia elettrica è accumulata? (si approssimi la costante dielettrica dell'aria con quella del vuoto). **(4 punti)**

Un elettrone che venga trasferito dalla nuvola a terra quanto lavoro elettrico compie? (se ne stimi il valore assoluto, non importa il segno). Questo lavoro in che modo dipende dalla traiettoria percorsa? **(4 punti)**

- 2.) Il sole irraggia energia elettromagnetica e l'intensità della radiazione che giunge sulla terra è di circa 1350 W/m^2 ; la distanza Sole-Marte è (in media) 1.52 volte la distanza Sole-Terra. Calcolare il valore quadratico medio del campo elettrico dei raggi solari che giungono sulla Terra e su Marte. **(8 punti)**
- 3.) Utilizzando la teoria degli spettri atomici dell'atomo di Bohr, costruire il diagramma dei livelli di energia dello ione di Litio doppiamente ionizzato, Li^{++} (si ricorda che il numero di elettroni nell'atomo di Litio neutro è $Z = 3$). Discutere i risultati nel confronto con lo spettro dell'idrogeno. **(8 punti)**

- 4.) L'isotopo Carbonio-14 (^{14}C) ha tempo di dimezzamento $t_{1/2} \approx 5730$ anni. Si hanno a disposizione quattro campioni dello stesso isotopo costituiti rispettivamente da: $NN \times 10^{22}$, $5 \cdot NN \times 10^{22}$, $7 \cdot NN \times 10^{22}$ e $10 \cdot NN \times 10^{22}$ nuclei. Fare un grafico dell'attività dei quattro campioni in funzione del numero di nuclei che li costituiscono **(specificare bene le quantità graficate e le loro unità di misura)**. **(3 punti)**

Il campione di Carbonio-14 è conservato in un ospedale insieme ad un campione di Cobalto-60 (^{60}Co) che viene usato per trattamenti radio-terapici. Sapendo che il tempo di dimezzamento del Cobalto-60 è di circa 5.3 anni, a parità di numero di nuclei iniziali dei due elementi (precisamente $N_0 = NN \times 10^{22}$) quale mostrerà un'attività maggiore all'inizio? dopo un anno? dopo dieci anni? dopo 100 anni? **(organizzare una tabella con chiare indicazioni delle quantità descritte, le loro unità di misura, i risultati)**. Che conclusioni trarre? **(5 punti)**

totale punti: 32

Fisica 2 per biotecnologie

Prova scritta: 30 Gennaio 2012

Soluzione Testo unico

per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti

- 1.) Tra la terra ed una nuvola di superficie $NC/3 \times 10^2 \text{ Km}^2$ e a distanza di (circa) 1500 m dal suolo, la differenza di potenziale instaurata vale (circa) $3.5 \cdot 10^7 \text{ Volt}$. Calcolare la capacità del sistema "condensatore" Terra-nuvola **discutendo le approssimazioni necessarie**.

(Si approssimi la costante dielettrica dell'aria con quella del vuoto).

Si approssima il sistema Terra-nuvola con un condensatore a facce piane e parallele vista l'estensione in rapporto alla distanza, la capacità è quindi espressa dalla

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d} = \frac{4\pi\epsilon_0}{4\pi} \frac{S}{d} \approx \frac{1}{4\pi} \frac{1}{9 \times 10^9} \frac{NC/3 \cdot 10^2 \times 10^4 \text{ m}^2}{1500 \text{ m}} \approx 1.18 \times 10^{-6} \text{ Farad},$$

per $NC = 6$. Quanta carica viene accumulata?

$$Q = C \cdot \Delta V = 1.18 \times 10^{-6} \text{ Farad} \cdot 3.5 \cdot 10^7 \text{ Volt} \approx 41.3 \text{ Coulomb}.$$

Quanta energia elettrica è accumulata?

$$En = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E}^2 dV = \frac{1}{2} (\Delta V)^2 C \approx 7.2 \cdot 10^8 \text{ Joule}.$$

Un elettrone che venga trasferito dalla nuvola a terra quanto lavoro elettrico compie? (se ne stimi il valore assoluto, non importa il segno). Questo lavoro in che modo dipende dalla traiettoria percorsa?

Il potenziale è proprio il lavoro fatto per unità di carica, dunque il lavoro vale

$$L = |q_e \Delta V| \approx 1.602 \times 10^{-19} \text{ Coulomb} \cdot 3.5 \times 10^7 \text{ Volt} \approx 5.6 \cdot 10^{-12} \text{ Joule},$$

indipendente dalla traiettoria percorsa, perché il campo elettrico è conservativo ed il lavoro NON dipende dal cammino tra i due punti fissati (Terra-nuvola).

(confronta esercizio 17 - 65 del libro di testo - Giancoli)

- 2.) Il sole irraggia energia elettromagnetica e l'intensità della radiazione che giunge sulla terra è di circa 1350 W/m^2 ; la distanza Sole-Marte è (in media) 1.52 volte la distanza Sole-Terra. Calcolare il valore quadratico medio del campo elettrico dei raggi solari che giungono sulla Terra e su Marte.

L'intensità (media) I_P dei raggi solari distribuita su di una sfera di raggio Sole-Pianeta (D_{SP}) è data dalla potenza (media) del sole P divisa per la superficie sferica su cui si distribuisce, ovvero $I_P = P/(4\pi D_{SP}^2)$, è questa intensità che viene osservata sul pianeta P , ($P = \text{Terra o Marte}$). Quindi

$$I_{Terra} = \frac{P}{4\pi D_{ST}^2}; \quad I_{Marte} = \frac{P}{4\pi D_{SM}^2}$$

da cui

$$I_{Marte} = I_{Terra} \left(\frac{D_{ST}}{D_{SM}} \right)^2 \approx 1350 \text{ Watt} \left(\frac{1}{1.52} \right)^2 \approx 584.3 \text{ Watt}.$$

L'intensità è legata ai campi elettrici e magnetici dell'onda elettromagnetica che la trasporta

$$I = \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{r}} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{c} \langle E^2 \rangle = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{c} E_{qm}^2$$

dove $E_{qm} = \langle E^2 \rangle$ è il valore quadratico medio (nel tempo) del campo elettrico.

In conclusione

$$\begin{aligned} E_{qm}|_{Terra} &= \sqrt{\mu_0 c I_{Terra}} \approx 713 \text{ Volt/m}; \\ E_{qm}|_{Marte} &= \sqrt{\mu_0 c I_{Marte}} \approx E_{qm}|_{Terra} / 1.52 \approx 469 \text{ Volt/m}. \end{aligned}$$

(confronta esercizio 22 - 32 del libro di testo - Giancoli)

- 3.) Utilizzando la teoria degli spettri atomici dell'atomo di Bohr, costruire il diagramma dei livelli di energia dello ione di Litio doppiamente ionizzato, Li^{++} (si ricorda che il numero di elettroni nell'atomo di Litio neutro è $Z = 3$). Discutere i risultati nel confronto con lo spettro dell'idrogeno.

Lo spettro degli ioni con un solo elettrone esterno obbedisce al modello di Bohr per l'atomo di idrogeno, con la sola differenza che negli ioni il nucleo centrale ha una carica Zq_e in luogo di q_e . Nel caso del Litio il numero atomico $Z = 3$.

Le energie dello spettro sono dunque date dalla ($n = 1, 2, 3, \dots$):

$$E_n = \frac{E_1}{n^2}$$

dove E_1 è il valore dell'energia dello stato fondamentale

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{1}{2} \frac{(k_e q_e^2)^2 m_e}{\hbar^2} \approx -13.6 \text{ eV} && \text{per l'atomo d'idrogeno,} \\ E_1 &= -\frac{1}{2} \frac{(k_e Z q_e^2)^2 m_e}{\hbar^2} \approx -13.6 \cdot Z^2 \text{ eV} && \text{per gli ioni con un singolo elettrone esterno.} \end{aligned}$$

Nel caso del Li^{++} , dunque

$$E_1 \approx -13.6 \cdot 3^2 \approx -122.4 \text{ eV},$$

e quindi $E_2 \approx -30.6 \text{ eV}$, $E_3 \approx -13.6 \text{ eV}$, $E_4 \approx -7.65 \text{ eV}$ etc...

Evidentemente lo spettro è del tutto simile, ma il valore dello stato fondamentale molto più basso. Questo è il risultato prodotto dalla presenza di una carica centrale Z -volte più elevata che attira l'unico elettrone esterno con una forza considerevolmente maggiore legandolo profondamente al nucleo. Il lavoro per strappare l'ultimo elettrone presente nello ione (122.4 eV , nel caso del Li^{++}) risulta molto maggiore dell'energia di ionizzazione dell'idrogeno (13.6 eV).

(confronta esercizio 27 - 58 del libro di testo - Giancoli)

- 4.) L'isotopo Carbonio-14 (^{14}C) ha tempo di dimezzamento $t_{1/2} \approx 5730$ anni. Si hanno a disposizione quattro campioni dello stesso isotopo costituiti rispettivamente da: $NN \times 10^{22}$, $5 \cdot NN \times 10^{22}$, $7 \cdot NN \times 10^{22}$ e $10 \cdot NN \times 10^{22}$ nuclei. Fare un grafico dell'attività dei quattro campioni in funzione del numero di nuclei che li costituiscono (specificare bene le quantità graficate e le loro unità di misura).

L'attività di un isotopo è definita come il numero di decadimenti che avvengono per unità di tempo (questa ultima può essere scelta a nostro piacimento e convenienza : il secondo, l'ora, l'anno ... etc..). Scegliamo l'unità tradizionale: il secondo. Dunque tutto dovrà essere riportato a tale scelta (tempo di dimezzamento, costante di decadimento e attività.)

$$A(t) = \left| \frac{dN(t)}{dt} \right| = \lambda N(t) = \frac{\log 2}{t_{1/2}} N(t)$$

con $N(t) = N(t=0) \cdot e^{-\lambda t}$. $N(t=0)$ sono proprio il numero di nuclei che costituiscono i quattro campioni di C-14 "oggi", ovvero a $t=0$. Quindi

$$A(t=0) = \frac{\log 2}{t_{1/2}} N(t=0)$$

è l'attività dei campioni "oggi".

Dunque la relazione tra l'attività e il numero di nuclei è lineare ed è documentata dalla Figura 1 e dalla Tavola 1.

Table 1: Tavola dell'attività dei quattro campioni di C-14 (espressa in N di decadimenti al secondo) in funzione del numero di nuclei che li costituiscono. I risultati si riferiscono ad $NN = 5$.

$N(t=0)$ (n nuclei)	$5 \cdot 10^{22}$	$25 \cdot 10^{22}$	$35 \cdot 10^{22}$	$50 \cdot 10^{22}$
$A(t=0)$ (N decad. / sec)	$0.19 \cdot 10^{12}$	$0.96 \cdot 10^{12}$	$1.34 \cdot 10^{12}$	$1.92 \cdot 10^{12}$

Il campione di Carbonio-14 è conservato in un ospedale insieme ad un campione di Cobalto-60 (^{60}Co) che viene usato per trattamenti radio-terapici. Sapendo che il tempo di dimezzamento del Cobalto-60 è di circa 5.3 anni, a parità di numero di nuclei iniziali dei due elementi (precisamente $N_0 = NN \times 10^{22}$) quale mostrerà un'attività

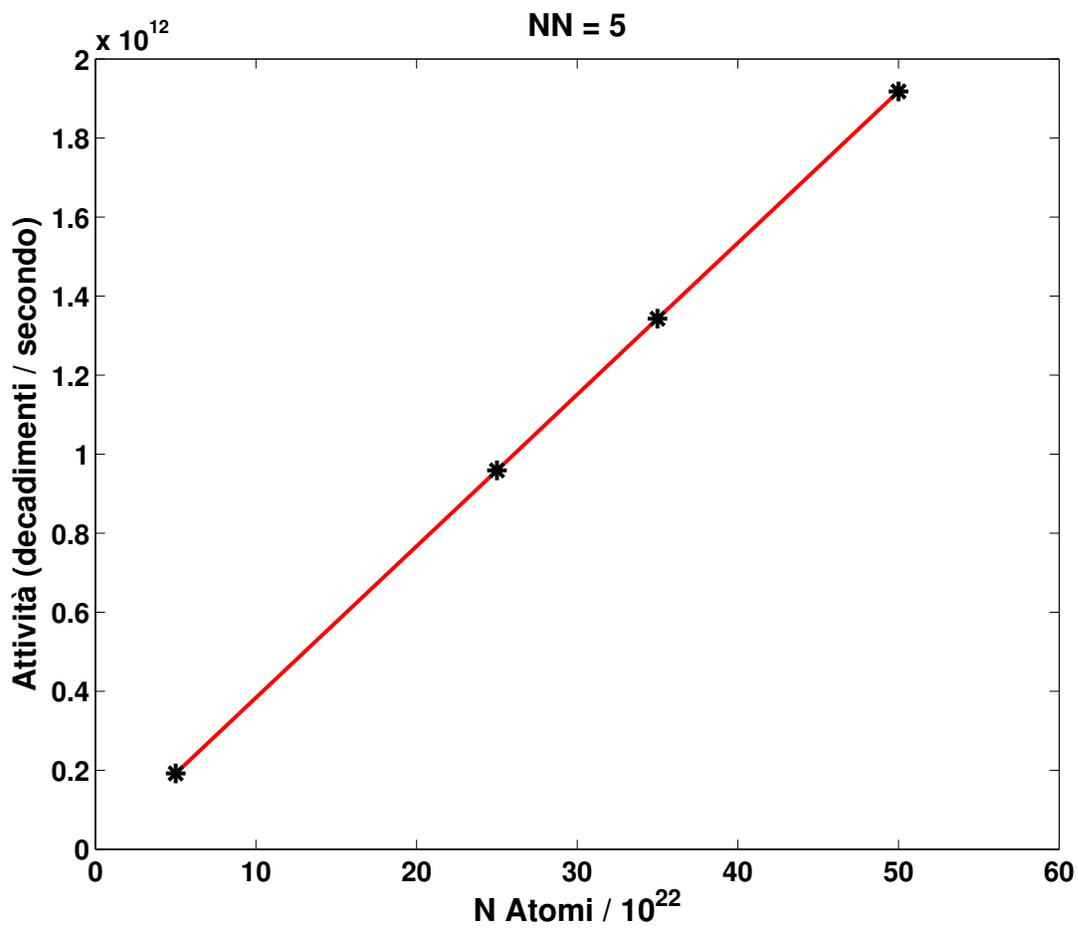


Figure 1: numero di decadimenti al secondo in funzione del numero di nuclei (o atomi) presenti nel campione in unità di 10^{22} . I quattro campioni sono identificati dagli asterischi (confronta Tavola 1) la legge è lineare.

maggiore all'inizio? dopo un anno? dopo dieci anni? dopo cento anni? (organizzare una tabella con chiare indicazioni delle quantità descritte, le loro unità di misura, i risultati). Che conclusioni trarre?

Table 2: Tavola dell'attività del C-14 e del Co-60 (espressa in N di decadimenti al secondo) in funzione del tempo ($t = 1$ anno, 10 anni, 100 anni) e a parità di numero di nuclei iniziali. I risultati si riferiscono ad $NN = 5$.

(Per convenienza sono anche riportati i valori dei tempi di dimezzamento, $t_{1/2}$ (in anni), e delle costanti di decadimento, λ (in anni)⁻¹).

nuclei	$t_{1/2}$ (anni)	$\lambda = \frac{\log 2}{t_{1/2}}$ (anni) ⁻¹	$N(t = 0)$ n nuclei	$A(t = 0)$ N decad./sec	$A(t = 1)$ N dec./sec	$A(t = 10)$ N dec./sec	$A(t = 100)$ N dec./sec
C-14	5730	$0.12 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{22}$	$0.0019 \cdot 10^{14}$	$0.0019 \cdot 10^{14}$	$0.0019 \cdot 10^{14}$	$0.0019 \cdot 10^{14}$
Co-60	5.3	0.13	$5 \cdot 10^{22}$	$2.07 \cdot 10^{14}$	$1.82 \cdot 10^{14}$	$0.56 \cdot 10^{14}$	$0.000004 \cdot 10^{14}$

Conclusioni da trarre: a parità di "dimensioni" del campione (stesso numero di nuclei iniziali, non stesso volume!) un materiale a più breve tempo di dimezzamento è più radioattivo, ma per un tempo più breve.

(confronta esempio 30 - 9 del libro di testo - Giancoli)