

Fisica 2 per biotecnologie: Prova scritta 15 Luglio 2013

Scrivere immediatamente, ED IN EVIDENZA, sui due fogli protocollo consegnati (ed eventuali altri fogli richiesti) la seguente tabella:

NOME : Numero lettere del nome $NN = \dots\dots\dots$

COGNOME : Numero lettere del Cognome $NC = \dots\dots\dots$

NUMERO DI MATRICOLA : = NM
[esempio: Mario (NN = 5) Careri (NC = 6) matricola 123456 (NM = 123456)]

Testo unico

nb: prima di sostituirvi i valori numerici, scrivere (coerentemente con il testo del problema) le formule utilizzate e giustificarle brevemente. Laddove necessario o richiesto, illustrare con semplici figure il procedimento usato.

È utilizzabile il libro di testo, anche per conoscere quantità necessarie per la risoluzione dei problemi. Tenere a disposizione sul banco un documento di identità .

Questo foglio NON va restituito.

per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti

- 1.) Un condensatore è costituito da due armature piane e parallele di area $A = 2 \text{ cm}^2$ poste alla distanza $d = 0.50 \text{ mm}$ (il condensatore è riempito di aria alla pressione di 1 atmosfera). Viene caricato collegandolo ad una batteria che eroga una tensione di $(2 \cdot NC)$ Volt e poi scollegato.
 - i) quanto vale la carica sul condensatore? (**punti 2**)
 - ii) Se le due armature (una volta scollegato il condensatore) vengono allontanate fino ad una distanza $D = 0.75 \text{ mm}$, come varia la carica sulle armature? (**punti 3**)
 - iii) la tensione ai capi del condensatore che valore raggiunge in questa nuova configurazione? (**punti 3**)
 - iv) che lavoro è stato compiuto per allontanare le armature? (**punti 4**)
 - v) (**bonus**) se si suppone che una forza costante si opponga all'allontanamento delle armature, calcolare tale forza e giustificare a posteriori l'ipotesi di una forza costante. (**punti 6**)
- - (totale **punti** esercizio = 12+6)

- 2.) Un protone compie un'orbita a spirale viaggiando attraverso un gas sottoposto all'azione di un campo magnetico di intensità $B_0 = 2 \cdot NN \cdot 10^{-3}$ Tesla ortogonale al piano della

spirale. Il raggio della spirale tra due passaggi successivi varia da $R_1 = 10$ mm a $R_2 = 8.5$ mm.

i) Quanta energia cinetica ha perduto il protone nel passaggio tra i due punti? (**punti 4**)

ii) (**bonus**) Supponendo ancora costante (in modulo e sempre diretta contro il moto) la forza di attrito incontrata dal protone attraverso il gas, dare una stima del suo valore. (**punti 6**)

- - (totale **punti** esercizio = 4+6)

3.) L'esperimento delle due fenditure viene eseguito con un fascio di luce monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda_1 = 500$ nm e la figura di interferenza viene osservata su uno schermo posto a 1.6 m di distanza dalle fenditure. Il massimo di interferenza del terzo ordine viene osservato a $2 \cdot NC$ mm di distanza dalla frangia centrale. Lo stesso apparato è utilizzato successivamente con una sorgente monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda_2 = 650$ nm. In questo secondo caso quale sarà la distanza dalla frangia centrale del massimo del secondo ordine della relativa figura di interferenza? (**punti 5**)

- - (totale **punti** esercizio = 5)

4.) Stimare il numero di fotoni emessi dal Sole in un anno considerando una lunghezza d'onda media emessa, $\lambda \approx 550$ nm, ed un'intensità I_0 della luce solare sulla superficie esterna dell'atmosfera del valore di $I_0 = 1350$ Watt/m². (**punti 4**)

- - (totale **punti** esercizio = 4)

5.) Applicare il modello di Bohr per l'atomo di idrogeno al sistema Terra-Luna quantizzando il suo momento angolare ad interi di \hbar come proposto da Bohr. Verificare che il numero quantico n che corrisponde all'orbita effettiva della luna vale $n \approx 3 \cdot 10^{68}$. Quale l'energia dell'orbita successiva? La differenza di energia tra le due orbite è rilevabile? commentare. Quale la differenza dei raggi tra le due orbite? è rilevabile? (**punti 7**)

- - (totale **punti** esercizio = 7)

- - - (totale **punti** della prova = 32+12)

Fisica 2 per biotecnologie
Prova scritta: 15 Luglio 2013
Soluzione Testo unico

[soluzioni numeriche per i valori dell'esempio:

Mario (NN = 5) Careri (NC = 6) matricola 123456 (NM = 123456)]

- 1.) Un condensatore è costituito da due armature piane e parallele di area $A = 2 \text{ cm}^2$ poste alla distanza $d = 0.50 \text{ mm}$ (il condensatore è riempito di aria alla pressione di 1 atmosfera). Viene caricato collegandolo ad una batteria che eroga una tensione di $(2 \cdot NC)$ Volt e poi scollegato.

i) quanto vale la carica sul condensatore?

Per definizione di Capacità , la carica Q accumulata vale

$$Q = V_C \cdot C ,$$

dove V_C è la tensione ai capi del condensatore e C la sua capacità , ovvero, nel nostro caso,

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} \approx \epsilon_0 \frac{A}{d} ,$$

essendo la costante dielettrica relativa dell'aria $\epsilon_r \approx 1.0006$ alla pressione di 1 atmosfera. Quindi

$$Q \approx 4.2 \cdot 10^{-11} \text{ Coulomb} .$$

(punti 2)

- ii) Se le due armature (una volta scollegato il condensatore) vengono allontanate fino ad una distanza $D = 0.75 \text{ mm}$, come varia la carica sulle armature?

Il sistema è isolato perché non collegato alla batteria. La carica non può cambiare.

(punti 3)

- iii) la tensione ai capi del condensatore che valore raggiunge in questa nuova configurazione?

La carica resta inalterata e quindi anche il campo elettrico interno. Aumentando la distanza la tensione aumenta ed anche la capacità (che dipende dalla distanza tra le armature) cambia.

$$V'_C = \frac{Q}{C'} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} D = \frac{Q}{\epsilon_0 A} d \frac{D}{d} = \frac{Q}{C} \frac{D}{d} = V_C \frac{D}{d} = 18 \text{ Volt} .$$

(punti 3)

- iv) che lavoro è stato compiuto per allontanare le armature?

L'energia elettrica accumulata nel condensatore dopo l'allontanamento delle armature è aumentata e questo aumento è proprio dovuto al lavoro compiuto sul condensatore per allontanare le armature (in virtù della presenza delle cariche opposte esse si attraggono ed occorre esercitare una forza per allontanarle...)

$$Energia_D = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C'} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 D}{C} = Energia_d \frac{D}{d},$$

ovvero l'energia è aumentata del fattore Q/d . Ne risulta una differenza

$$\Delta E = Energia_D - Energia_d = \frac{D-d}{d} Energia_d = \frac{D-d}{d} \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \approx 1.27 \cdot 10^{-10} \text{ Joule.}$$

(punti 4)

v) (**bonus**) se si suppone che una forza costante si opponga all'allontanamento delle armature, calcolare tale forza e giustificare a posteriori l'ipotesi di una forza costante.

Supponendo che il lavoro ΔL , di una forza costante F abbia prodotto la variazione di energia ΔE , si ha:

$$\Delta E = \Delta L = F \cdot (D - d) = \frac{D - d}{d} \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C},$$

e quindi

$$F = \frac{1}{d} \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q \frac{Q}{\epsilon_0 A} = \frac{1}{2} Q \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1}{2} Q E \approx 5.1 \cdot 10^{-7} \text{ Newton},$$

dove $\sigma = Q/A$ è la densità superficiale di carica ed $E = \sigma/\epsilon_0$ il campo elettrico interno al condensatore. La forza è dunque costante perché né la carica, né il campo elettrico variano durante l'allontanamento delle armature.

(punti 6)

- 2.) Un protone compie un'orbita a spirale viaggiando attraverso un gas sottoposto all'azione di un campo magnetico di intensità $B_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ Tesla ortogonale al piano della spirale. Il raggio della spirale tra due passaggi successivi varia da $R_1 = 10$ mm a $R_2 = 8.5$ mm.

i) Quanta energia cinetica ha perduto il protone nel passaggio tra i due punti?

La velocità (costante in modulo) con cui il protone percorre l'orbita circolare di raggio R_1 è

$$v_1 = q_p \frac{B_0}{m_p} R_1,$$

e quella di raggio R_2

$$v_2 = q_p \frac{B_0}{m_p} R_2,$$

dunque la variazione di energia cinetica diviene

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} m_p v_1^2 - \frac{1}{2} m_p v_2^2 = \frac{1}{2} q_p^2 \frac{B_0^2}{m_p} (R_1^2 - R_2^2) \approx 2.13 \cdot 10^{-20} \text{ Joule}.$$

(punti 4)

ii) (**bonus**) Supponendo ancora costante (in modulo e sempre diretta contro il moto) la forza di attrito incontrata dal protone attraverso il gas, dare una stima del suo valore. (punti 6)

Per stimare la forza F (supposta costante) lungo la traiettoria tra le orbite con raggi non molto diversi, si potrebbe supporre che l'orbita (intermedia) percorsa sia un'orbita circolare di raggio "medio" $R_m = (R_1 + R_2)/2$. Si ottiene

$$\Delta E_{kin} = \Delta L = F \cdot 2\pi R_m,$$

ovvero

$$F = \frac{\Delta E_{kin}}{2\pi \frac{R_1 + R_2}{2}} \approx 3.7 \cdot 10^{-19} \text{ Newton}.$$

- 3.) L'esperimento delle due fenditure viene eseguito con un fascio di luce monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda_1 = 500 \text{ nm}$ e la figura di interferenza viene osservata su uno schermo posto a 1.6 m di distanza dalle fenditure. Il massimo di interferenza del terzo ordine viene osservato a $2 \cdot NC \text{ mm}$ di distanza dalla frangia centrale. Lo stesso apparato è utilizzato successivamente con una sorgente monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda_2 = 650 \text{ nm}$. In questo secondo caso quale sarà la distanza dalla frangia centrale del massimo del secondo ordine della relativa figura di interferenza?

La posizione dei massimi risponde alla legge

$$\begin{aligned} n_1 \lambda_1 &= d \sin \theta_1 \approx d \tan \theta_1 = d \frac{x_1}{L}, \\ n_2 \lambda_2 &= d \sin \theta_2 \approx d \tan \theta_2 = d \frac{x_2}{L}; \end{aligned}$$

dove, nel nostro caso, $L = 1.6 \text{ m}$, $n_1 = 3$, $n_2 = 2$. L'approssimazione $\sin \theta \approx \tan \theta$, è verificata dato che $x_1/L \approx 0.0075$.

Si ottiene

$$x_2 = \frac{n_2}{n_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_1 = \frac{2}{3} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_1 \approx 10.4 \text{ mm}$$

(punti 5)

- 4.) Stimare il numero di fotoni emessi dal Sole in un anno considerando una lunghezza d'onda media emessa, $\lambda \approx 550 \text{ nm}$, ed un'intensità I_0 della luce solare sulla superficie esterna dell'atmosfera del valore di $I_0 = 1350 \text{ Watt/m}^2$.

La Potenza totale emessa da sole risulta

$$P_S = I_0 \cdot 4\pi D_{TS}^2 \approx 3.8 \cdot 10^{26} \text{ Watt},$$

avendo supposto che la radiazione emessa dal sole sia uniforme su tutta la sfera di raggio D_{TS} = distanza Terra-Sole. Il numero di fotoni emessi in un anno = N_{anno} , risultano

$$N_{anno} = \frac{P_S}{\frac{hc}{\lambda}} \cdot [\text{Numero di secondi in un anno}] \approx 3.3 \cdot 10^{52}.$$

(punti 4)

- 5.) Applicare il modello di Bohr per l'atomo di idrogeno al sistema Terra-Luna quantizzando il suo momento angolare ad interi di \hbar come proposto da Bohr. Verificare che il numero quantico n che corrisponde all'orbita effettiva della luna vale $n \approx 3 \cdot 10^{68}$. Quale l'energia dell'orbita successiva? La differenza di energia tra le due orbite è rilevabile? commentare. Quale la differenza dei raggi tra le due orbite? è rilevabile?

La forza Gravitazionale che fa percorrere alla luna un'orbita approssimativamente circolare di raggio D_{TL} intorno alla terra, fornisce la forza centripeta necessaria

$$\frac{M_L V_L^2}{D_{TL}} = G \frac{M_T M_L}{D_{TL}^2}, \quad (1)$$

quindi l'energia totale della luna, data dalla sua energia cinetica ($\frac{1}{2} M_L V_L^2$) sommata alla sua energia potenziale ($-G \frac{M_T M_L}{D_{TL}}$), si riduce a metà della sua energia potenziale (come nel caso dell'idrogeno)

$$E = \frac{1}{2} M_L V_L^2 - G \frac{M_T M_L}{D_{TL}} = -\frac{1}{2} G \frac{M_T M_L}{D_{TL}}. \quad (2)$$

D'altra parte la quantizzazione del momento angolare \mathbf{L} (in totale analogia col modello di Bohr) risulta (r è il raggio dell'orbita circolare)

$$\mathbf{L}^2 = (M_L V_L r)^2 = (n\hbar)^2 \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots$$

e, usando la (1) conduce alla

$$\frac{1}{r} = G \frac{M_T M_L}{n^2 \hbar^2} M_L \quad (3)$$

quantizzando le possibili distanze Terra-Luna, e le energie

$$E = -\frac{1}{2} \frac{(G M_T M_L)^2}{n^2 \hbar^2} M_L = -\frac{E_1}{n^2}. \quad (4)$$

Se a questo punto si fissa l'energia del sistema tramite i valori delle masse e della distanza Terra-Luna ($M_T \approx 5.98 \cdot 10^{24}$ Kg, $M_L \approx 7.35 \cdot 10^{22}$ Kg e $D_{TL} \approx 3.84 \cdot 10^8$ m, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Neut \cdot m²/Kg²) sia dalla (3) che dalla (4) si ottiene

$$n \approx 3 \cdot 10^{68} .$$

Un numero spropositato che rivela la non rilevabilità degli effetti quantistici riducendo a valori non misurabili le differenze tra livelli quantici. Ad esempio, dalla (4) e ricordando che n è enorme per cui $2n + 1 \approx 2n$, ed $(n + 1)^2 n^2 \approx n^4$,

$$E_{n+1} - E_n = E_1 \left[\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} \right] = E_1 \left[\frac{(n+1)^2 - n^2}{(n+1)^2 n^2} \right] \approx E_1 \left[\frac{2}{n^3} \right] \approx 1 \cdot 10^{-40} \text{ Joule} ,$$

ovvero le differenze di energie non risultano misurabili. Anche le differenze tra i raggi delle orbite (3)

$$r_{n+1} - r_n = [(n+1)^2 - n^2] \frac{\hbar^2}{GM_T M_L^2} \approx 2n \frac{\hbar^2}{GM_T M_L^2} \approx 3 \cdot 10^{-60} \text{ m}$$

ridicolmente piccole, certo non misurabili.

(punti 7)