Circuiti RC

Carica e scarica del condensatore (solo le formule)

Consideriamo un condensatore di capacità C collegato in serie ad una resistenza di valore R. I due elementi sono collegati ad una batteria che eroga una differenza di potenziale costante V_0. Il circuito può essere chiuso tramite l'interruttore T, come da figura 1a.

Si consideri la situazione appena dopo la chiusura dell'interruttore (diciamo al tempo $t = 0$): il condensatore è inizialmente scarico e l'unico elemento a limitare la corrente nel circuito è la resistenza R, la corrente che si instaurerà è quindi

$$i(t = 0) = \frac{V_0}{R} \,. \tag{1}$$

Negli istanti successivi l'equazione per i potenziali risulterà

$$V_0(t) = V_R(t) + V_C(t) = Ri(t) + \frac{q(t)}{C} \,, \tag{2}$$

dove $V_R = Ri$ è la tensione ai capi della resistenza (legge di Ohm), $V_C = q/C$, quella ai capi del condensatore quando avrà accumulato una carica q. Vale la relazione (conservazione della carica)

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \,. \tag{3}$$

Derivando la (2), otteniamo

$$\frac{dV_0(t)}{dt} = R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) \,, \tag{4}$$

che nel caso di alimentazione a potenziale costante $V_0(t) = V_0$ e quindi $\frac{dV_0(t)}{dt} = 0$, si riduce a:

$$R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = 0 \,, \tag{5}$$

che ammette come soluzione che rispetta la condizione (1)

$$i(t) = \frac{V_0}{R}\, e^{-t/(RC)} \,, \tag{6}$$

e quindi

$$V_C(t) = V_0 \left[1 - e^{-t/(RC)}\right] \ . \tag{7}$$

Una volta caricato alla carica q finale (si noti che in virtù della relazione $C = q/V_C$, e della (7)

$$q(t) = CV_0 \left[1 - e^{-t/(RC)}\right] \ ) \ , \tag{8}$$

il condensatore, viene poi scaricato chiudendolo su di una resistenza R' (vedi circuito di figura 1b). Le soluzioni della (5) devono rispettare condizioni al contorno diverse per $t = 0$ (istante in cui si chiude il circuito) ovvero $q(t = 0) = CV_0$, $V_C(t = 0) = V_0$, e si ottengono le

$$\begin{aligned} V_C(t) &= V_0\, e^{-t/(R'C)} \ . \\ i(t) &= \frac{V_0}{R}\, e^{-t/(R'C)} \ , \\ q(t) &= CV_0\, e^{-t/(R'C)} \ . \end{aligned} \tag{9}$$

Risposta in frequenza e filtro passa alto e passa basso

Supponiamo ora che l'alimentatore del circuito RC sia a frequenza costante e del tipo

$$V_0(t) = V_0 \cos \omega t \ , \tag{10}$$

dove $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ con ν e T rispettivamente frequenza e periodo della funzione armonica $V(t)$ di ampiezza V_0. Ci domandiamo come variano (al variare della frequenza ν, ovvero della pulsazione ω) le differenze di potenziale in uscita ai capi della resistenza e del condensatore.

Dalla (4) potremmo ottenere una soluzione per la corrente che sarà del tipo

$$i(t) = i_0 \cos(\omega t + \phi) \, ,$$

ovvero (ricordando che $\cos(\omega t + \phi) = \cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi$ e $\sin(\omega t + \phi) = \sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi$) si ottiene:

$$-\omega V_0 \sin \omega t = \frac{1}{C} i_0 \ (\cos \omega t \ \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi) - R i_0 \omega \ (\sin \omega t \ \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi) \ . \tag{11}$$

Perché tale relazione sia valida per ogni istante t, occorrerà che i coefficienti del $\sin\omega t$ e $\cos\omega t$ siano uguali, ovvero

$$
\begin{aligned}
-\omega V_0 &= -\frac{1}{C} i_0 \sin\phi - R i_0 \omega \cos\phi \;, && (12)\\
0 &= \frac{1}{C} i_0 \cos\phi - R i_0 \omega \sin\phi \;; && (13)
\end{aligned}
$$

ovvero[1]

$$
\begin{aligned}
\tan\phi &= \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{1}{\omega C R} \,, && (14)\\
i_0 &= \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \;; && (15)
\end{aligned}
$$

La prima delle equazioni precedenti segue dalla (13), la seconda dalla (12) e dalla nota a pie' di pagina. Dunque la corrente acquista una fase che dipende dalla frequenza ed anche l'ampiezza della corrente dipende dalla frequenza.

Studiamo ora la risposta del circuito raccogliendo in uscita la tensione ai capi della resistenza R, ovvero $V_{\rm out} = V_R = Ri(t)$ (figura 2a). Si avrà

$$
V_{\rm out} = Ri(t) = V_0 \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos(\omega t + \phi) \,; \qquad (16)
$$

da cui (ricordando che $V_{\rm in}(t) = V_0 \cos\omega t$), rapporto delle ampiezze e fase risultano:

$$
\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{|V_{\rm out}|}{|V_{\rm in}|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}}} \,, && (17)\\
\tan\phi &= \frac{1}{\omega C R} \,, && (18)
\end{aligned}
$$

determinando così un filtro che seleziona le frequenze alte (filtro passa alto, $A(\omega \to \infty) \to 1$), mentre $A(\omega \to 0) \to 0$).

Diversa la situazione se $V_{\rm out} = V_C$ (figura 2b) la tensione ai capi del condensatore. In questo caso si avrebbe:

[1] Si ricorda che $\cos\phi = 1/\sqrt{1+\tan^2\phi}$ e $\sin\phi = \tan\phi/\sqrt{1+\tan^2\phi}$.

$$
\begin{aligned}
V_{\text{out}} &= V_C(t) = V_{\text{in}}(t) - V_R(t) = V_0 \cos\omega t - Ri(t) = \\
&= V_0 \cos\omega t - V_0 \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos(\omega t + \phi) \\
&= V_0 \cos\omega t - V_0 \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos\omega t - \frac{1/\omega C}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \sin\omega t \right)
\end{aligned} \tag{19}
$$

con $V_{\text{out}} = V_C(t) = q(t)/C = V_C \cos(\omega t + \alpha) = V_C(\cos\omega t \cos\alpha - \sin\omega t \sin\alpha)$; ovvero dividendo i termini in $\sin\omega t$ e $\cos\omega t$, come prima, si ha

$$
\begin{aligned}
V_C \cos\alpha &= V_0 - \frac{R^2 V_0}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = V_0 \left[\frac{1/\omega^2 C^2}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \right] , \\
-V_C \sin\alpha &= V_0 \left[\frac{R/\omega C}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \right] ;
\end{aligned}
$$

ovvero

$$
\tan\alpha = -\omega C R\,, \tag{20}
$$

$$
A(\omega) = \frac{|V_{\text{out}}|}{|V_{\text{in}}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}\,; \tag{21}
$$

determinando così un filtro che seleziona le frequenze basse (filtro passa basso, $A(\omega \to \infty) \to 0$), mentre $A(\omega \to 0) \to 1$).

Resistenze e capacità distribuite

In un circuito in cui capacità e resistenze siano distribuite (come in un cavo coassiale o in un modello per l'assone di una cellula neurale) la corrente dipenderà dalla posizione lungo il cavo $i(x,t)$ e così il potenziale elettrico $V(x,t)$. La corrente traversa lungo il ramo capacitivo sia

$$
i_c(x,t) = \frac{dq(x,t)}{dt} = C\,\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = c\Delta x\,\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \tag{22}
$$

dove abbiamo definito la capacità per unità di lunghezza c tale che $C = c\Delta x$ per un tratto Δx di circuito. In ogni tratto Δx la corrente nel punto $x + \Delta x$

sarà inferiore a quella in x di una quantità pari alla corrente traversa nella capacità, ovvero (la dipendenza dal tempo di correnti e potenziali non verrà esplicitamente segnalata per non appesantire il formalismo, ma è sottintesa),

$$i(x) = i_c(x) + i(x + \Delta x) \tag{23}$$

mentre per il potenziale varrà

$$V(x) - V(x + \Delta x) = Ri(x) = r\Delta x\, i(x) \ , \tag{24}$$

dove r è la resistenza per unità di lunghezza.
Si ottengono le seguenti equazioni

$$\frac{i(x + \Delta x) - i(x)}{\Delta x} = -\frac{i_c(x)}{\Delta x} = -\frac{c\Delta x}{\Delta x}\frac{\partial V(x + \Delta x)}{\partial t}$$

ovvero

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -c\,\frac{\partial V}{\partial t} \ ; \tag{25}$$

e analogamente

$$\frac{V(x + \Delta x) - V(x)}{\Delta x} = -\frac{Ri(x)}{\Delta x} = -r\, i(x)$$

ovvero

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -r\, i(x) \ . \tag{26}$$

Derivando la (26) rispetto ad x e tenendo conto della (25), si ottiene infine

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -r\,\frac{\partial i}{\partial x} = rc\,\frac{\partial V}{\partial t} \ , \tag{27}$$

ovvero:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - rc\,\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \ , \tag{28}$$

equazione differenziale per il potenziale lungo la direzione del cavo.

Soluzione della (28) per potenziali alternati all'ingresso.
Assumiamo $V(x = 0) = V_0 \cos \omega t$, come sarà il potenziale in un punto qualunque x del circuito?

L'ampiezza dovrà diminuire lungo x in virtù della presenza delle resistenze $r\Delta x$, mentre la corrente in ogni punto fissato dovrà oscillare nel tempo con una fase che dipenderà dalla distanza (per analogia con le risposte dei circuiti RC), potremmo tentare dunque una soluzione del tipo

$$\begin{aligned} V(x,t) &= V_0 e^{-\alpha x} \cos[\omega t - \phi(x)] = \\ &= V_0 e^{-\alpha x} \cos[\omega t - kx] = V_0 e^{-\alpha x} \cos[kx - \omega t] \end{aligned} \tag{29}$$

avendo supposto $\phi(x) = kx$, cioè assumendo una fase che cambia linearmente con la distanza e ricordando che il coseno ha la proprietà $\cos(-\vartheta) = \cos(\vartheta)$.

Sostituendo la (29) nella (28) si ottiene

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = V_0 e^{-\alpha x} \left[(k^2 - \alpha^2) \cos(kx - \omega t) + 2k\alpha \sin(kx - \omega t)\right] \tag{30}$$

$$rc\,\frac{\partial V}{\partial t} = rc\,V_0 e^{-\alpha x} \left[\omega \sin(kx - \omega t)\right] \tag{31}$$

che implicano, se la (28) deve essere rispettata,

$$\begin{aligned} k^2 - \alpha^2 &= 0 \\ 2k\alpha &= \omega rc\,, \end{aligned} \tag{32}$$

ovver la (29) diviene

$$\begin{aligned} V(x,t) &= V_0 e^{-\sqrt{\omega rc/2}\,x} \cos\left[\sqrt{\frac{\omega rc}{2}}x - \omega t\right] \\ &= V_0 e^{-\sqrt{\omega rc/2}\,x} \cos\left[\sqrt{\frac{\omega rc}{2}}\left(x - \frac{\omega}{\sqrt{\omega rc/2}}t\right)\right] \qquad (33) \\ &= V_0 e^{-\sqrt{\omega rc/2}\,x} \cos\left[\sqrt{\frac{\omega rc}{2}}\,(x - vt)\right] \qquad (34) \end{aligned}$$

dove

$$v = \frac{\omega}{\sqrt{\omega rc/2}} = \sqrt{\frac{2\omega}{rc}}\,. \tag{35}$$

In conclusione il rapporto tra l'ampiezza del segnale lungo la linea ad una distanza x dall'origine vale

$$\frac{|V(x,t)|}{|V(0)|} = e^{-\sqrt{\omega rc/2}\,x}\,, \tag{36}$$

e la fase

$$\phi(x) = -kx = -\sqrt{\frac{\omega rc}{2}}\, x \; . \tag{37}$$

Si noti che la funzione

$$\cos(kx - \omega t) = \cos[k(x - vt)]$$

riassume lo stesso valore dopo un intervallo di spazio $\lambda = 2\pi/k$ (lunghezza d'onda) per t fissato, e riassume, in ogni punto fissato x, lo stesso valore dopo un intervallo di tempo $T = 2\pi/\omega$ (periodo). Questa periodicità è perduta per la soluzione (34) a causa dell'attenuazione (36) dell'ampiezza. È più consono in questo caso, in luogo di definire la velocità di fase

$$v = v_{\text{fase}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$$

definire una velocità di gruppo v_g con cui si muove uno (stretto) gruppo d'onda.

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \left[\frac{dk}{d\omega}\right]^{-1} = \left[\frac{d}{d\omega}\sqrt{\frac{\omega rc}{2}}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{rc}{2\omega}}\,\right]^{-1} = 2\,\sqrt{\frac{2\omega}{rc}} = 2\, v_{\text{fase}}\; .$$

La discussione del concetto di velocità di gruppo va oltre gli scopi del nostro corso, ma a lezione si farà cenno all'analisi di Fourier ed alla possibilità di sparpagliamento del pacchetto d'onda in mezzi in cui, come nel nostro caso, il coefficiente k (numero d'onda) dipenda da ω.