Diffusione Rutherford

Diffusione di particelle alfa (^{4}He^{++}) da Atomi di oro (foglio sottile) $^{197}_{79}$Au. Calcolo sotto le ipotesi di:

i) urto elastico;

ii) potenziale Coulombiano dovuto al nucleo di oro come puntiforme.

ne segue che: i) nell'urto si conserva l'energia cinetica della particella alfa, quindi il modulo della sua velocità (cinematica non relativistica, $m_\alpha \approx 7350$ m$_e$); ii) si conserva il momento angolare dato che l'interazione è centrale.

dalla legge della dinamica

$$\mathbf{F} = m_\alpha \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

si ottiene (integrando nel tempo di diffusione)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}_f} d\mathbf{p} &= \int_0^\infty \mathbf{F} dt \\ m_\alpha \mathbf{v}_f - m_\alpha \mathbf{v}_0 &= \int_0^\infty \mathbf{F}(\mathbf{r}) dt = \int_0^{\phi_{max}} \mathbf{F}(r,\phi) \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^{-1} d\phi \end{aligned} \tag{1}$$

dove $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{v}_f$ sono le velocità iniziali e finali della particella alfa, ϕ l'angolo che la congiungente della posizione istantanea della particella alfa con il nucleo di oro (retta OP) forma con la direzione iniziale della stessa particella alfa, $\mathbf{F}$ la forza (coulombiana) che agisce sulla particella alfa

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = k_e \frac{ze\,Ze}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

con $z = 2$ e $Z = 79$ e $k_e = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$ in MKSA.

Si rammenta che la traiettoria della particella alfa è un'iperbole con asintoti dati dalla retta di entrata (a $\phi = 0$) e di uscita (con $\phi = \phi_{max}$) delle particelle. Proiettando quindi l'equazione (1) lungo la retta OA che è la bisettrice tra i due asintoti, (si noti che $\phi_{max} = \pi - \theta$, con θ angolo di diffusione), si ottiene (si noti che $\mathbf{F}(r,\phi) \cdot \hat{OA} = k_e \frac{zeZe}{r^2} \cos\left(\frac{\phi_{max}}{2} - \phi\right)$):

$$m_\alpha v_0 \cos\frac{\phi_{max}}{2} + m_\alpha v_f \cos\frac{\phi_{max}}{2} = \int_0^{\phi_{max}} |\mathbf{F}(r,\phi)| \cos\left(\frac{\phi_{max}}{2} - \phi\right) \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^{-1} d\phi \,. \tag{2}$$

L'equazione precedente si può senplificare notando che (per conservazione del momento angolare $\mathbf{L}$)

$$|\mathbf{L}_0| = m_\alpha |\mathbf{v}_0| b = |\mathbf{r} \times \, m_\alpha \mathbf{v}| = |\mathbf{r} \times \, m_\alpha (v_r \hat{\mathbf{r}} + r\dot{\phi}\hat{\phi}| = r^2 \, m_\alpha \dot{\phi}$$

dove b è il parametro d'impatto della particella alfa incidente (distanza tra la direzione incidente della particella alfa ed il nucleo di oro). Dalla conservazione del momento angolare si ha quindi:

$$\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} = \frac{b|\mathbf{v}_0|}{r^2}$$

e l'integrale della equazione (2) diviene

$$\begin{aligned}
2\, m_\alpha v_0 \cos\frac{\phi_{max}}{2} &= \int_0^{\phi_{max}} k_e \frac{zeZe}{r^2} \, \cos\left(\frac{\phi_{max}}{2} - \phi\right) \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^{-1} d\phi = \\
&= \int_0^{\phi_{max}} k_e \frac{zeZe}{r^2} \, \cos\left(\frac{\phi_{max}}{2} - \phi\right) \frac{r^2}{b\,|\mathbf{v}_0|} d\phi = \\
&= k_e \frac{zeZe}{b\,|\mathbf{v}_0|} \int_{-\frac{\phi_{max}}{2}}^{+\frac{\phi_{max}}{2}} \cos\xi \, d\xi = \\
&= k_e \frac{zeZe}{b\,|\mathbf{v}_0|} \, \sin\xi \Big|_{-\frac{\phi_{max}}{2}}^{+\frac{\phi_{max}}{2}} = k_e \frac{zeZe}{b\,|\mathbf{v}_0|} \, 2 \, \sin\frac{\phi_{max}}{2} \; ;
\end{aligned} \tag{3}$$

ovvero

$$b = k_e \, \frac{zZe^2}{m_\alpha v_0^2} \, \frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \, \frac{zZe^2}{T_\alpha}\right] \frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}} = \frac{D_m}{2} \, \frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}} \; . \tag{4}$$

dove $T_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2$ è l'energia cinetica della particella alfa incidente e D_m la distanza minima di avvicinamento della particella alfa al nucleo in un urto centrale.

sezione d'urto Rutherford

Se un flusso di particelle incidenti F_0 colpisce la lamina d'oro, e dN è il numero di particelle rilevate sotto un angolo solido $d\Omega$ per unità di tempo e diffuse da *un singolo centro diffusore*, si avrà

$$dN = F_0 \, |2\pi b \, db| = F_0 \, 2\pi \frac{D_m^2}{8} \, \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}} \, d\theta = F_0 \, \frac{D_m^2}{16} \, \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \, d\Omega$$

essendo $d\Omega = 2\pi \, \sin\theta d\theta = 4\pi \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} \, d\theta$.

In conclusione la sezione d'urto differenziale risulta:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{F_0} \frac{dN}{d\Omega} = \frac{D_m^2}{16} \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{4T_\alpha}\right]^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \ . \tag{5}$$

Sebbene la sezione d'urto differenziale decresca molto rapidamente con l'angolo di diffusione, il suo valore resta molto più grande di quello ottenuto nel modello di Thomson dove gli elettroni sono immersi in una distribuzione uniforme di carica positiva e le particelle alfa subiscono diffusioni a piccolo angolo.

Si noti che la sezione d'urto diverge per l'angolo di diffusione che va a zero. Però si deve notare che dall'eq.(4), a piccoli angoli di diffusione corrispondono grandi valori del parametro d'impatto, **che non può però superare la metà della distanza tra i nuclei di oro, ordinati in posizioni regolari.**

sezione d'urto all'indietro

la sezione d'urto all'indietro fissa il numero di particelle (per unità di flusso incidente e per ogni singolo centro diffusore) che diffondono all'indietro ($\pi/2 \leq \theta \leq \pi$) al secondo.

$$\begin{aligned}
\sigma_{\text{back}} &= \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{D_m^2}{16} \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} d\Omega = \frac{D_m^2}{16} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} 2\pi \sin\theta d\theta = \\
&= \frac{D_m^2}{16} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} 2\pi \, 2 \times 2 \, \sin\frac{\theta}{2} \, \cos\frac{\theta}{2} \, d\frac{\theta}{2} = \frac{D_m^2}{16} 8\pi \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{1}{\xi^3} d\xi = \\
&= \frac{D_m^2}{16} 4\pi = \pi \left(\frac{D_m}{2}\right)^2 \equiv \pi R_{\text{back}}^2 \ . \qquad (6)
\end{aligned}$$

Nel caso di particelle alfa diffuse da nuclei di oro nell'esperimento di Geiger e Marsden: $T_\alpha = 7.68$ MeV, $z = 2$, $Z = 79$, e dato che

$$\begin{aligned}
\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} &\approx 2.998^2 \cdot 10^9 \, \text{Newton} \cdot \text{m}^2 \, \text{Coulomb}^{-2} \cdot [1.602 \cdot 10^{-19}]^2 \, \text{Coulomb}^2 \\
&\approx 14.4 \cdot \underbrace{1.602 \cdot 10^{-19} \text{Joule}} \cdot \underbrace{10^{-10} \, \text{m}} = 14.4 \, \text{eV} \cdot \text{Å} \ ;
\end{aligned}$$

$$D_m \approx \frac{2 \cdot 79 \cdot 14.4 \, \text{eV} \cdot \text{Å}}{7.68 \cdot 10^6 \, \text{eV}} \approx 2.96 \cdot 10^{-4} \, \text{Å} \approx 30 \, \text{fm} \ .$$

ovvero

$$\sigma_{\text{back}} \approx 6.88 \cdot 10^{-30} \, \text{m}^2 \ .$$