Equilibrio oscillatore carico radiazione nera

Consideriamo dapprima un'onda piana, monocromatica e polarizzata linearmente, che attraversi un sottile strato (dx) di dielettrico omogeneo ed isotropo a bassa densità (un gas ad esempio)
Campo elettrico e magnetico (con opportuna scelte del sistema di riferimento) sono caratterizzati da (sistema di unità di misura: MKS)

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \hat{\mathbf{y}}\, E_0\, e^{i(kx-\omega t)} \\ \mathbf{B} &= \hat{\mathbf{z}}\, B_0\, e^{i(kx-\omega t)} \;.\end{aligned}$$

Con $\mathbf{B} = \mu_r\mu_0\,\mathbf{H}$, e $\mathbf{D} = \epsilon_r\epsilon_0\,\mathbf{E}$. Da

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{H} &= +\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla\times\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

si ha
$k\,H_0 = \omega\,\epsilon_r\epsilon_0\,E_0$
e
$k\,E_0 = \omega\,\mu_r\mu_0\,H_0$
da cui $k^2 = \omega^2\mu_r\mu_0\,\epsilon_r\epsilon_0 = (\omega^2/c^2)n^2$ che definisce l'indice di rifrazione $n = \sqrt{\mu_r\epsilon_r}$, in generale complesso e la relazione tra le ampiezze B_0 ed E_0
$B_0 = \frac{n}{c}E_0$. Il fatto che l'indice di rifrazione sia complesso introduce una fase tra $\mathbf{B}$ ed $\mathbf{E}$ data da $B_0 = \frac{|n|}{c}\,e^{i\psi}$ dove $|n| = \sqrt{n_R^2+n_I^2}$ e $\tan\psi = n_I/n_R$. Inoltre introduce un'attenuazione dovuta alla parte immaginaria dell'indice di rifrazione

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \hat{\mathbf{y}}\, E_0\, e^{-\frac{n_I\omega}{c}x}\, e^{i(\frac{n_R\omega}{c}x-\omega t)} \\ \mathbf{B} &= \hat{\mathbf{z}}\, E_0\frac{\sqrt{n_R^2+n_I^2}}{c}\, e^{-\frac{n_I\omega}{c}x}\, e^{i(\frac{n_R\omega}{c}x-\omega t+\psi)} \;.\end{aligned}$$

L'intensità dell'onda nella direzione di propagazione $\hat{\mathbf{x}}$ risulta

$$
\begin{aligned}
I &= \langle [\Re\,\mathbf{E} \times \Re\,\mathbf{H}] \cdot \hat{\mathbf{x}} \rangle = \\
&= \frac{1}{\mu_r \mu_0}\, E_0^2\, \frac{\sqrt{n_R^2 + n_I^2}}{c}\, e^{-2\frac{n_I \omega}{c} x}\, \langle \cos(\frac{n_R \omega}{c} x - \omega t) \cos(\frac{n_R \omega}{c} x - \omega t + \psi) \rangle = \\
&= \frac{1}{\mu_r \mu_0}\, E_0^2\, \frac{\sqrt{n_R^2 + n_I^2}}{c}\, e^{-2\frac{n_I \omega}{c} x} \times \\
&\times\ \langle \cos(\frac{n_R \omega}{c} x - \omega t) \left[\cos(\frac{n_R \omega}{c} x - \omega t) \cos\psi - \sin(\frac{n_R \omega}{c} x - \omega t) \sin\psi \right] \rangle = \\
&= \frac{1}{\mu_r \mu_0}\, E_0^2\, \frac{\sqrt{n_R^2 + n_I^2}}{c}\, e^{-2\frac{n_I \omega}{c} x} \times \frac{1}{2} \cos\psi = \\
&= \frac{1}{\mu_r \mu_0}\, E_0^2\, \frac{n_R}{c}\, e^{-2\frac{n_I \omega}{c} x} \times \frac{1}{2}\ .
\end{aligned}
$$

(Si noti che $n_R = \sqrt{n_R^2 + n_I^2}\, \cos\psi$). Nel passare attraverso lo strato dx di dielettrico (incidendo su di una area unitaria $area$) l'intensità si attenuerà di una quantità dI corrispondente ad un assorbimento di energia da parte del materiale, cioè un lavoro fatto sul volume $dx \cdot area$ e mediato sul ciclo:

$$
-dI \cdot area = \langle \frac{dL}{dt} \rangle
$$

dove

$$
-dI = -\frac{dI}{dx}\, dx = +2 \frac{n_I\, \omega}{c}\, I\, dx\ .
$$

Il modello ad elettroni legati elasticamente permette di calcolare parte reale e parte immaginaria dell'indice di rifrazione che per materiali poco densi (ed in cui gli effetti magnetici possano essere trascurati) risulta $n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \approx \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{1 + (\epsilon_r - 1)} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\epsilon_r$. Da cui

$$
\begin{aligned}
n_R &= 1 + \frac{1}{2} \frac{N e^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \\
n_I &= \frac{1}{2} \frac{N e^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}
\end{aligned}
$$

e questo permette di calcolare la perdita di intensità in funzione della frequenza

$$
-dI = \frac{2\,\omega}{c} I\, dx\, \frac{1}{2} \frac{N e^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{\gamma\, \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}\ .
$$

In presenza di una distribuzione di intensità I_ω, ovvero di una densità di energia spettrale $u_\omega = I_\omega/c$, la perdita di energia intorno alla frequenza ω_0 risulta:

$$
\begin{aligned}
-dI &= dx \int_0^\infty d\omega \, \frac{2\, n_I \omega}{c} \, I_\omega = \\
&= dx \int_0^\infty d\omega \frac{2\omega}{c} \, c \, u_\omega \, \frac{1}{2} \, \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e} \, \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \\
&= dx \, \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e} \int_0^\infty d\omega \, u_\omega \, \frac{\gamma\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \\
&\approx dx \, \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e} \int_0^\infty d\omega \, u_\omega(\omega_0) \, \frac{\gamma\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega_0^2} \\
&= dx \, \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e} \, u_\omega(\omega_0) \, \frac{1}{2} \int_0^\infty 2 \, \frac{d\omega}{\gamma} \, \frac{1}{4\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\gamma^2} + 1} \\
&= dx \, \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e} \, u_\omega(\omega_0) \frac{1}{2} \int_{-\xi_0 = -2\omega_0/\gamma}^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi^2 + 1} \\
&\approx dx \, \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e} \, u_\omega(\omega_0) \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi^2 + 1} \\
&= dx \, \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e} \, u_\omega(\omega_0) \frac{\pi}{2} \ ,
\end{aligned}
$$

dove $\xi = 2\,(\omega - \omega_0)/\gamma$. La prima approssimazione è dovuta al fatto che l'integrando è estremamente concentrato intorno ad $\omega = \omega_0$, per cui $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = (\omega_0 + \omega_0)^2(\omega - \omega_0)^2 \approx 4\,\omega_0^2\,(\omega - \omega_0)^2$, $u_\omega \to u_\omega(\omega_0)$, etc.. La seconda approssimazione è dovuta sempre al fatto che $\gamma \ll \omega_0$ quindi $-\xi_0 = -2\,\omega_0/\gamma \to -\infty$.
Da questa espressione possiamo calcolare il lavoro fatto dalla radiazione sul singolo oscillatore alla frequenza ω_0 del tutto arbitraria e che fa parte dello spettro u_ω. Da pag. 2 dividendo il lavoro medio fatto su di un volume di materiale per il numero di oscillatori presenti nello stesso volume $n_{\text{oscillatori}} = N \cdot area \cdot dx$)

$$
\frac{1}{N \cdot area \cdot dx} \, \langle \frac{dL}{dt} \rangle = \frac{1}{N \cdot area \cdot dx} \, (-dI) \cdot area = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e} \, u_\omega(\omega_0) \frac{\pi}{2}
$$

si arriva al lavoro medio fatto dalla radiazione sul singolo oscillatore da una radiazione polarizzata linearmente lungo la direzione dell'oscillatore.

nb: Se la radiazione (come nel caso di un corpo nero) è polarizzata casualmente, il lavoro fatto su di un singolo oscillatore lineare (come quello considerato) è ridotto ad un terzo di quello calcolato (per simmetria e casualità della polarizzazione)

$$\langle \frac{dL}{dt} \rangle \Big|_{\text{singolo oscillatore lineare}} = \frac{1}{3} \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e} u_\omega(\omega_0) \frac{\pi}{2} \ . \tag{1}$$

L'ultimo pezzo di informazione per calcolare ora la espressione per u_ω necessaria all'equilibrio, è relativa alla potenza diffusa per irraggiamento dallo stesso oscillatore (unidimensionale) alla frequenza di risonanza ω_0. Questa vale

$$\langle P_{\text{diffusa}} \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \langle \ddot{y} \rangle \ ,$$

dove $\ddot{y} = -\omega_0^2 y$ è l'accelerazione dell'oscillatore. Si ha $y = y_0 \, e^{i\omega_0 t} = |y_0| e^{i(\omega_0 t + \phi)}$. Così l'energia media dell'oscillatore gode della proprietà

$$\langle E \rangle = \langle \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \rangle + \langle \frac{1}{2} m \omega_0^2 y^2 \rangle = \langle \frac{1}{2} m \omega_0^2 y^2 \rangle + \langle \frac{1}{2} m \omega_0^2 y^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle E \rangle + \frac{1}{2} \langle E \rangle$$

e la potenza diffusa può essere scritta

$$\langle P_{\text{diffusa}} \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{e^2}{m_e c^3} \, \omega_0^2 \, \langle E \rangle \ .$$

La conservazione dell'energia impone dall'equazione(1)

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{e^2}{m_e c^3} \, \omega_0^2 \, \langle E \rangle \ = \frac{1}{3} \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e} u_\omega(\omega_0) \frac{\pi}{2}$$

da cui si ottiene la distribuzione spettrale della densità di energia in funzione della frequenza ($\nu = \frac{\omega}{2\pi}$, $u_\nu d\nu = u_\omega d\omega$ o $u_\nu = u_\omega / (2\,\pi)$)

$$u_\nu = \frac{u_\omega}{2\pi} = \frac{8\,\pi}{c^3} \nu^2 \, \langle E \rangle = \frac{8\,\pi}{c^3} \nu^2 \, K_{\text{B}} T$$

dove si è utilizzata la relazione $\langle E \rangle = K_{\text{B}} T$ per un oscillatore unidimensionale.

La formula ottenuta va sotto il nome di densità spettrale classica della radiazione nera o distribuzione alla Rayleigh - Jeans.

Si noti che $\int_0^\infty d\nu\, u_\nu \;\rightarrow\; \infty$. D'altra parte la densità spettrale è legata all'energia emessa per unità di tempo ed unità di superficie da un corpo riscaldata alla temperatura T su tutto un angolo piatto: $S_\nu = \frac{c}{4}\, u_\nu$ e vale la $\int_0^\infty d\nu\, S_\nu = \sigma T^4$ dove $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\, \frac{\text{Joule}}{m^2\, sec}\, \frac{1}{{}^0K^4}$ e quindi anche la densità spettrale integrata su tutte le frequnze deve essere proporzionale a T^4, ovvero $\int_0^\infty d\nu\, u_\nu = \frac{4}{c}\, \sigma\, T^4$.

Riferimenti bibliografici

[1] Max Born, FISICA ATOMICA, Boringhieri (dal capitolo 5 e appendice 34)

[2] Riccardo Becker, TEORIA DELL'ELETTRICITA', vol. II, Sanzoni Edizioni Scientifiche, 1949 (capitolo C, p. 159 e ss).