Soluzioni Prova scritta di Introduzione alla Fisica Quantistica

28 Giugno 2005

1.)
Se il fotone incidente ha energia $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \approx 20.7$ eV, il fotoelettrone emesso ha energia cinetica pari a $T_e = h\nu - 13.6$ eV ≈ 7.1 eV, essendo 13.6 eV l'energia di ionizzazione dell'atomo di idrogeno nel suo stato fondamentale.

2.)
a) La frequenza di soglia del potassio è tale che $h\nu_{\text{soglia}} = \phi$ ovvero $\nu_{\text{soglia}} = \frac{\phi}{h} \approx 5.34 \cdot 10^{14}$ Hz.
b) la potenza incidente sull'elettrodo di potassio vale (emissione isotropa assunta) $P_{\text{inc}} = \frac{P_0}{4\pi d^2} = E_\nu \cdot n_\nu$ dove E_ν è l'energia del fotone incidente e n_ν il numero di fotoni incidenti al secondo. Quindi

$$n_\nu = \frac{P_0}{4\pi d^2}\frac{1}{E_\nu}$$

ed il suo massimo è raggiunto quando E_ν è minimo, ovvero alla soglia $E_\nu = \phi$. In corrispondenza avremo la produzione del massimo numero di fotoelettroni al secondo ($n_e|_{\text{Max}}$)

$$n_e|_{\text{Max}} = \frac{P_0}{4\pi d^2}\frac{1}{\phi} \approx 5.4 \cdot 10^{14} \text{ elettroni al secondo}$$

c) Se la radiazione incidente ha lunghezza d'onda $\lambda = 2500$ Å, l'energia cinetica degli elettroni emessi risulta $T_e = \frac{hc}{\lambda} - \phi \approx 4.96 - 2.21 = 2.75$ eV.
d) Il potenziale d'arresto vale $V_a = T_e = \frac{hc}{\lambda} - \phi$ ad una variazione $d\lambda/\lambda = 0.4/100$ (piccola (!) come nel nostro caso) si ha

$$|dV_a| = hc\frac{d\lambda}{\lambda}\frac{1}{\lambda} \approx 0.02\,\text{Volt}$$

3.)

a) Essendo l'energia cinetica dell'elettrone $E = 5.0$ eV $\ll m_e c^2 = 0.511$ MeV, si possono usare formule non relativistiche per le quantità cinematiche. Quindi da $E = \mathbf{p}^2/2m_e$ si ha

$$\lambda = \frac{h}{|\mathbf{p}|} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E}} \approx 0.55\,\text{nm} \ .$$

Si noti che la lunghezza d'onda di de Broglie dell'elettrone è dello stesso ordine di grandezza della larghezza della barriera, mi aspetto effetti quantistici rilevanti (come l'effetto tunnel).

b)

$$
\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} &= E\Phi = \frac{\hbar^2}{2m_e}\,k^2\,\Phi \quad \text{per } x<0 \text{ e } x>L\ ; \\
-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} &= -(V_0-E)\Phi = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\,k'^2\,\Phi \quad \text{per } 0<x<L
\end{aligned}
$$

c) Soluzioni

$$
\begin{aligned}
\Phi_I(x) &= A_1\,e^{ikx} + B_1\,e^{-ikx} \\
\Phi_{II}(x) &= A_2\,e^{k'x} + B_1\,e^{-k'x} \\
\Phi_{III}(x) &= A_3\,e^{ikx}
\end{aligned}
$$

con

$$k' = \sqrt{\frac{2m_e}{\hbar^2}(V_0-E)} \approx 5.12\cdot 10^9\ \mathrm{m}^{-1}\ .$$

d)

$$\frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = T \approx 16\,\frac{E}{V_0}\left(1-\frac{E}{V_0}\right)\cdot e^{-2k'L} \approx 0.0017$$

adimensionale.

d) Essendo la probabilità di trovare l'elettrone nella zona III $|A_3|^2 \approx 0.0017|A_1|^2$, il numero di elettroni che devono urtare la barriera perch'e in media uno passi vale

$$n = \frac{1}{T} \approx 588$$

e) per protoni

$$k'_p = \sqrt{\frac{2m_p}{\hbar^2}(V_0-E)} \approx 2.19\cdot 10^{11}\ \mathrm{m}^{-1}\ .$$

e

$$\frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = T \approx 16\,\frac{E}{V_0}\left(1-\frac{E}{V_0}\right)\cdot e^{-2k'L} \approx 2.22\cdot e^{-306.6} = 1.6\cdot 10^{-133} \approx 0.$$

Il coefficiente di trasmissione è praticamente nullo. Per interpetare questo risultato si consideri la lunghezza d'onda di de Broglie del protone con identica energia cinetica

$$\lambda_p = \frac{h}{|\mathbf{p}|} = \frac{h}{\sqrt{2m_pE}} \approx 1.28\cdot 10^{-2}\,\mathrm{nm}\ .$$

ovvero molto più piccola (due ordini di grandezza) delle dimensioni della barriera: l'effetto tunnel diviene praticamente trascurabile.

————- costanti/ combinazioni utili/ conversioni

velocità della luce nel vuoto: $c = 2.998 \times 10^8$ m/sec
costante di Planck: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ Joule·sec = 4.136×10^{-15} eV·sec
cost. di Boltzmann: $K_B = 1.38 \times 10^{-23}$ Joule/^{0}K;
massa dell'elettrone: $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ Kg; ovvero $m_e c^2 = 0.511$ MeV
massa del protone: $m_p \approx 1836 m_e$.
$k_e e^2 = 1.44$ MeV $\cdot$ fm; 1 eV = 1.602×10^{-19} Joule; 1 Å$= 10^{-10}$ m = 10^5 fm
$h \cdot c = 19.865 \times 10^{-26}$ Joule·m = 12.41×10^3 eV· Å.