

Corso di Introduzione alla Fisica Quantistica (f)

Soluzioni Esercizi: Giugno 2006

* *Quale la lunghezza d'onda di de Broglie di un elettrone che ha energia cinetica $E_1 = 2 \text{ KeV}$ e massa a riposo $m_0 = 9.11 \times 10^{-31} \text{ Kg}$? E quella λ_2 dello stesso elettrone quando l'energia cinetica sale a $E_2 = 100 \text{ MeV}$?*

* *Calcolare le lunghezze d'onda di de Broglie di due elettroni che possiedono energie cinetiche rispettivamente di 1.5 KeV e 100 KeV .*

Questi esercizi sono tutti apparentemente identici (ed in gran parte lo sono) l'unica vera attenzione è nell'uso di approssimazioni non relativistiche nel calcolo della lunghezza d'onda di de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{|\mathbf{p}_e|} = \frac{hc}{|\mathbf{p}_e|c} = \frac{12.41 \cdot 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{|\mathbf{p}_e|c}$$

infatti l'espressione relativistica $E_{\text{cin}} = \sqrt{(\mathbf{p}_e c)^2 + (m_e c^2)^2} - m_e c^2$ per l'energia cinetica va utilizzata nel caso in cui E_{cin} è confrontabile o maggiore di $m_e c^2 = 0.511 \cdot 10^6 \text{ eV}$. Come esempio illustriamo il caso di elettroni da 2 KeV . Si ha

$$(p_e c) = \sqrt{(E_{\text{cin}} + m_e c^2)^2 - (m_e c^2)^2} \approx 45.25 \text{ KeV} ;$$

usando formule relativistiche, mentre

$$(p_e c) = \sqrt{2 m_e c^2 E_{\text{cin}}} \approx 45.21 \text{ KeV} ;$$

usando l'approssimazione nonrelativistica. Questo valore di energia cinetica è già un valore limite per utilizzare l'approssimazione nonrelativistica.

* *Calcolare la lunghezza d'onda del fotone emesso da un atomo di idrogeno nella transizione dal primo stato eccitato allo stato fondamentale. Quale la stima delle dimensioni dello stesso atomo nel modello di Thomson?*

Lo spettro dell'atomo di idrogeno $E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV}$, determina una lunghezza d'onda di transizione dal primo stato eccitato ($n = 2$) allo stato fondamentale ($n = 1$) pari a

$$\lambda_{21} = \frac{c}{\nu_{21}} = \frac{hc}{h\nu_{21}} = \frac{hc}{E_{21}} = \frac{hc}{13.6 \left(1 - \frac{1}{4}\right) \text{ eV}} = \frac{12.41 \cdot 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{13.6 \cdot 3/4 \text{ eV}} \approx 1217 \text{\AA} .$$

Nell'atomo di Thomson la frequenza della riga emessa corrisponde alla frequenza propria dell'elettrone che oscilla nella sfera di carica positiva intorno alla sua posizione di equilibri (il centro della sfera). La dimensione della sfera di raggio R (pensata rigida) contribuisce alla frequenza calcolando le forze elettriche che agiscono sull'elettrone (non si ripete qui il calcolo)

$$\omega_0^2 = \frac{k_e e^2}{R^3 m_e}$$

dove $k_e e^2 = e^2 / (4\pi\epsilon_0) = 14.4 \text{ eV} \cdot \text{\AA}$. Siccome $\nu_0 = \omega_0 / (2\pi)$ viene identificata dall'esercizio come la frequenza dovuta alla transizione 2 1, si ottiene

$$R^3 = \frac{k_e e^2}{m_e c^2} \frac{\lambda_{21}^2}{(2\pi)^2} = \frac{14.4 \text{ eV} \cdot \text{\AA} \cdot 1217^2 \text{\AA}^2}{0.511 \times 10^6 \text{ eV} (2\pi)^2},$$

ovvero $R \approx 1.1 \text{ \AA}$.

* *Se nell'atomo del precedente esercizio l'elettrone fosse sostituito da un muone (che ha la stessa carica e massa 207 volte più grande) quale risulterebbe la lunghezza d'onda del fotone emesso?*

* *Nell'atomo formato da un muone ed un protone si calcoli l'energia dello stato fondamentale del sistema. Che errore relativo si commetterebbe se non si usasse la massa ridotta del sistema protone-muone?*

Lo spettro dell'atomo di idrogeno come dato dal modello di Bohr è

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{(k_e e^2)^2 m_e c^2}{(hc)^2 n^2} (2\pi)^2 \approx -\frac{13.6 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{n^2}$$

implica che m_e sia la massa ridotta dell'elettrone $m_e = m_0 M_p / (m_0 + M_p)$ dove m_0 ed M_p sono rispettivamente la massa a riposo dell'elettrone ($m_0 c^2 = .511 \text{ MeV}$) e del protone ($M_p c^2 = 938.3 \text{ MeV}$). Ne risulta $m_e \approx m_0$ a meno di piccole correzioni dell'ordine $1/2000 \approx 0.5$ per mille (correzioni che possono comunque essere rilevanti nell'analisi degli spettri dell'atomo di idrogeno). Nel caso dell'atomo nuonico le correzioni sono rilevanti, si ottiene una massa ridotta del muone:

$$m_\mu = \frac{(207m_e)M_p}{207m_e + M_p} \approx 186 m_e .$$

che produce una lunghezza d'onda di transizione 186 volte più grande ed un'energia dello stato fondamentale incrementata dello stesso fattore. L'errore relativo che si commetterebbe in entrambi i casi, se si considerasse la massa a riposo invece della massa ridotta, risulta $207/186 \approx 1.11$.

* Una pallina di massa $m = 0.05 \text{ Kg}$ si muove lungo l'asse x sotto l'azione di una forza elastica di costante elastica $k = 10 \text{ N/m}$. Si calcoli l'energia dello stato fondamentale e l'energia di separazione di due livelli vicini, utilizzando l'equazione di Schrodinger. Se l'ampiezza del moto vale $a = 10 \text{ cm}$, qual'è il valore corrispondente del numero quantico?

La pulsazione propria dell'oscillatore vale

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{200} \text{ rad/sec} ,$$

che corrisponde ad un'energia dello stato fondamentale dell'oscillatore quantico

$$E_0 = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_0 \Big|_{n=0} \approx 7.5 \times 10^{-34} \text{ Joule} ,$$

ed ad una separazione di due livelli vicini

$$\Delta E = \hbar \omega_0 = 2 E_0 \approx 14.9 \times 10^{-34} \text{ Joule} .$$

Se il moto ha un'ampiezza $a = 10 \text{ cm}$, vuol dire l'energia dell'oscillatore, costante perché conservata durante il moto ($E = 1/2mv^2 + 1/2kx^2$), vale

$$E = \frac{1}{2} k a^2 = 0.05 \text{ Joule} = \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) ,$$

(valutata quando $v = 0$ e quindi $x = a$); da cui

$$n \approx 3 \times 10^{31} .$$

* Ripetere l'esercizio precedente per un elettrone legato nell'atomo di idrogeno secondo il modello di Thomson (raggio $R = 0.53 \text{ \AA}$). Stimare il numero quantico corrispondente ad un'ampiezza del moto dell'ordine di 1 \AA .

Nel caso dell'atomo di Thomson la pulsazione propria risulta (vedi esercizio precedente)

$$\omega_0^2 = \frac{k_e e^2}{R^3 m_e}$$

che, per $R = 0.53 \text{ \AA}$, dà

$$\hbar\omega_0 = 27.2 \text{ eV}$$

corrispondente ad un'energia dello stato fondamentale $E_0 = \hbar\omega_0/2 = 13.6 \text{ eV}$. Il moto di ampiezza $a = 1 \text{ \AA}$ corrisponde ad un'energia

$$E = k a^2/2 = m_e \omega_0^2/2 \approx 48.4 \text{ eV}$$

e quindi ad un numero quantico

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_0 \approx E$$

cioè dell'ordine dell'unità ($n \approx 1.3$).

** Si calcoli in valore assoluto e relativo le variazioni di massa di un atomo di idrogeno ($M_H c^2 = 938.79 \text{ MeV}$) che emette la prima riga della serie Lyman e di quella Balmer. Calcolare la velocità di rinculo dell'atomo nei due casi.*

Le prime righe della serie Lyman e Balmer corrispondono a

$$\begin{aligned} h\nu_L &= 13.6 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) \approx 10.2 \text{ eV Lyman} \\ h\nu_B &= 13.6 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) \approx 1.9 \text{ eV Balmer} \end{aligned}$$

e queste rappresentano le variazioni assolute di massa a riposo dell'atomo, le variazioni relative sono dell'ordine $h\nu/M_H c^2$ cioè dell'ordine $10^{-8} - 10^{-9}$.

Per stimare la velocità di rinculo dell'atomo si usano le leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto (in approssimazione non relativistica dato che la massa dell'atomo è molto più grande delle energie dei fotoni):

$$\begin{aligned} h\nu_{(L,B)} = \Delta E &= E_\gamma + E_{\text{cin}} = h\nu + \frac{p_{\text{atomo}}^2}{2M_H} ; \\ p_\gamma &= \frac{h\nu}{c} = p_{\text{atomo}} . \end{aligned}$$

Da qui si vede che anche la frequenza del fotone emesso varia a causa del rinculo dell'atomo, ma le variazioni sono minime e dell'ordine $h\nu_{(L,B)}/M_H c^2$. La velocità è quindi detreminabile assumendo $h\nu = h\nu_{(L,B)}$. Ne risulta

$$p_{\text{atomo}} \approx \frac{h\nu_{(L,B)}}{c}$$

e quindi

$$\frac{1}{2}M_H v^2 = \frac{p_{\text{atomo}}^2}{2M_H} = \frac{[h\nu_{(L,B)}]^2}{2M_H c^2}$$

da cui $v^2/c^2 \approx 1.18 \times 10^{-16} - 4.1 \times 10^{-18}$, ovvero $v \approx 3.3 - 0.6$ m/sec.