Corso di Introduzione alla Fisica Quantistica (f)

Esercizi: Maggio 2006 (con soluzione)

i) Un filamento emette radiazione che ha una lunghezza d'onda massima $\lambda_{\rm Max} = 15000 \cdot 10^{-8}$ cm. Considerando di approssimare il filamento con un corpo nero, determinarne la temperatura.
[suggerimento: si dimostri che la densità spettrale di un corpo nero ha il suo massimo per $hc/(\lambda_{\rm Max}\, K_{\rm B}T) \approx 4.965$, ovvero $\lambda_{\rm Max}\, T \approx 0.002897\ {}^0$K·m. Si verifica infatti, che $hc/(\lambda_{\rm Max}\, K_{\rm B}T) = x_{\rm Max} \approx 4.965$, risolve l'equazione trascendentale $x = 5(1 - e^{-x})$.]

Soluzione i):
La densità di potenza radiante (per unità di frequenza) di un corpo nero ad una data temperatura è legata alla densità spettrale da

$$S_\nu = \frac{c}{4} u_\nu$$

dove u_ν è fornita dalla formula di Planck. Ne segue:

$$S_\nu\, d\nu = \frac{c}{4}\,\frac{8\pi}{c^3}\,\nu^2\,\frac{h\,\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}} - 1}\,d\nu\ ,$$

ovvero in unità di lunghezza d'onda $S_\lambda = S_\nu \left|\frac{d\nu}{d\lambda}\right|$ si ha:

$$S_\lambda = \frac{2\pi}{\lambda^5}\,c^2\,h\,\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_BT}} - 1}\ .$$

La lunghezza d'onda massima (cioè in corrispondenza del massimo di emissione) è legata al massimo della funzione S_λ a fissata temperatura. Ovvero $\frac{dS_\lambda}{d\lambda} = 0$ e derivando si ottiene che il valore di λ per cui la derivata si annulla è dato dalla soluzione dell'equazione trascendente:

$$\frac{hc}{\lambda k_B T} = 5\,\left(1 - e^{-\frac{hc}{\lambda k_BT}}\right)$$

ovvero $x = 5\,(1 - e^{-x})$ che ha soluzione (come dice il testo) per $x = 4.965$, ovvero $T\,\lambda_{\rm Max} \approx 0.002897\ {}^0$K·m come già sottolineato. Se ne deduce $T \approx 1931\ {}^0$K.

ii) Una stella che invia alla terra un flusso di energia di 10^{-18} W/m^2 viene osservata con un canocchiale di 10 cm di diametro (d). Ammesso che questo flusso sia concentrato sulla lunghezza d'onda $\lambda = 0.55 \cdot 10^{-6}$ m (e tralasciando le perdite eventuali) si calcoli quanti fotoni al secondo concorrono a formare l'immagine della stella.

Soluzione ii):
Alla lunghezza d'onda dichiarata l'energia di un singolo fotone risulta $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \approx \frac{12.41\,\mathrm{KeV}\cdot\mathrm{\mathring{A}}}{500\,\mathrm{\mathring{A}}} \approx 2.26\ \mathrm{eV} \approx 3.61 \cdot 10^{-19}$ Joule. Il flusso $\mathcal{F}$ di energia che arriva sulla terra corrisponde ad un numero di fotoni al secondo per metro quadro pari a $\mathcal{N} = \mathcal{F}/E \approx 2.77$; di questi solo la porzione incidente su di un diametro $d = 10$ cm formerà l'immagine della stella, cioè un numero di fotoni al secondo pari a $\mathcal{N}_d = \mathcal{N} \cdot \pi\,(d/2)^2 \approx 0.022$.

iii) Si determini la variazione di frequenza (per effetto Compton) di raggi X di 100 KeV diffusi da elettroni ad un angolo di 60 gradi.

Soluzione iii):
Dalla formula di Compton

$$\lambda' - \lambda = \frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{h\nu'} - \frac{hc}{h\nu} = \frac{h}{m_e c}\,(1 - \cos\theta)$$

con $\cos 60^0 = 1/2$, e $h\nu = 100$ KeV. Si ha: $\lambda' - \lambda = \frac{hc}{m_e c^2}\,\frac{1}{2} \approx \frac{12.41\,\mathrm{KeV}\cdot\mathrm{\mathring{A}}}{0.511\,\mathrm{MeV}}\,\frac{1}{2} \approx 0.012$ Å.

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda + (\lambda' - \lambda) = \frac{hc}{h\nu} + (\lambda' - \lambda) = \\ &\approx \frac{12.41\,\mathrm{KeV}\cdot\mathrm{\mathring{A}}}{100\,\mathrm{KeV}} + 0.012 = 0.136\ \mathrm{\mathring{A}}\ , \end{aligned}$$

corrispondente an una frequenza del fotone diffuso pari a $\nu' \approx 2.20 \cdot 10^{19}$ Hz. Il fotone in ingresso aveva frequenza $\nu = h\nu/h \approx 2.42 \cdot 10^{19}$ Hz, la variazione di frequenza risulta $\nu' - \nu \approx (2.20 - 2.41) \cdot 10^{19} = -0.21 \cdot 10^{19}$ Hz.

iv) Trovare il campo magnetico trasversale necessario per confinare gli elettroni ottenuti per effetto fotoelettrico, entro un cerchio di 20 cm di raggio quando una radiazione di 4000 Å incide su un catodo di bario (lavoro di estrazione $W_0 = 2.5$ eV).

Soluzione vi):
L'energia cinetica massima posseduta dagli elettroni ottenuti per effetto fotoelettrico è $E_{\mathrm{cin}} = \frac{1}{2} m_e \mathbf{v}^2 = h\nu - W_0 = \frac{hc}{\lambda} - W_0 \approx \frac{12.41\cdot 10^3\,\mathrm{eV}}{4000\,\mathrm{\mathring{A}}} = 0.60\,\mathrm{eV}$ che

corrisponde ad una velocità dell'elettrone $v \approx 4.59 \cdot 10^5$ m/sec. Il campo magnetico confinante deve produrre una forza ($|-e\mathbf{v} \times \mathbf{B}|$) centripeta ($m_e \mathbf{v}^2/R$) tale da confinare gli elettroni in $R = 20$ cm. Essendo il campo trasversale alla velocità si ha

$$evB = m_e \frac{v^2}{R}$$

da cui $B \approx 1.30 \cdot 10^{-5}$ Tesla.

v) Sapendo che per ricoprire 1 cm^2 di un elettrodo con dell'argento per mezzo di un processo di elettrolisi è occorso un tempo pari a 57 minuti, e che lo spessore depositato è di 0.2 mm, calcolare la corrente elettrica necessaria all'operazione.
[Il peso atomico dell'argento è di 107.87, la sua densità 10.5 gr/cm^3 e la sua valenza uno).

Soluzione v):
Il Volume di argento depositato è $\delta V \approx 1\,\mathrm{cm}^2 \cdot 0.02\,\mathrm{cm} = 0.02\,\mathrm{cm}^3$. Il numero di atomi trasportati (n_{atomi}) per depositare tale volume corrisponde al numero di moli (n_{moli}) che δV contiene moltiplicato il numero di Avogadro (N_A) che rappresenta il numero di atomi per mole. D'altra parte il numero delle moli contenuto nel volume può essere trovato valutando la massa (densità $\cdot$ volume, espressa in grammi) e dividendo per il peso atomico sempre in grammi, si ha dunque:

$$n_{\mathrm{moli}} = \frac{\varrho\,\delta V}{\mu_A} \approx \frac{10.5\,\mathrm{gr/cm}^3 \cdot 0.02\,\mathrm{cm}^3}{107.87\,\mathrm{gr}} = 0.00195\,\mathrm{moli}$$

e di conseguenza $n_{\mathrm{atomi}} = n_{\mathrm{moli}} \cdot N_A = 0.00195 \cdot 6.02 \cdot 10^{23} \approx 1.17 \cdot 10^{21}$. Ogni atomo trasporta una carica elementare (valenza uno) per cui la carica totale trasportata risulta $Q_{\mathrm{tot}} = n_{\mathrm{atomi}} \cdot e = 1.17 \cdot 10^{21} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{Coulomb} = 187.81$ Coulomb. Tale carica è stata depositata in $\Delta t = 57$ minuti $= 57 \cdot 60 = 3420$ secondi. Quindi la corrente (media) per traportarla risulta

$$i = \frac{Q_{\mathrm{tot}}}{\Delta t} = \frac{187.81 \text{ Coulomb}}{3420 \text{ secondi}} \approx 0.055 \text{ Ampere}\ .$$

vi) In un esperimento si osservano moti Browniani di particelle di raggio $a = 10^{-4}$ cm immerse in un liquido alla temperatura di 19 ^{0}C e viscosità $\eta = 0.0278$ gr$\cdot$cm^{-1}. Stimare i tempi di osservazione minimi necessari sapendo che sono apprezzabili spostamenti quadratici medi dell'ordine $\langle x^2 + y^2 \rangle \approx 10^{-6}$ cm^2 sul piano di osservazione.

Soluzione vi):
La formula di Einstein per la media degli spostamenti quadratici a tempi lunghi

$$\langle x^2 + y^2 \rangle = \frac{4K_BT}{6\pi\eta a}\, t$$

ovvero

$$t = \frac{6\pi\eta a}{4K_BT}\, \langle x^2 + y^2 \rangle \approx 324 \text{ sec} \approx 5 \text{ minuti} .$$

vii) La sezione d'urto Thomson da elettroni atomici dipende dalla lunghezza d'onda dei raggi X incidenti? perché? Come può essere utilizzata la diffusione Thomson per misurare il numero atomico di un elemento?

Soluzione vii):
La sezione d'urto Thomson è la sezione d'urto di diffusione da elettroni legati nel limite in cui la frequenza ($\frac{\omega}{2\pi}$) della radiazione incidente sia molto maggiore della frequenza propria ($\frac{\omega_0}{2\pi}$) dell'elettrone ($\omega \gg \omega_0$). In questo limite la sezione d'urto NON dipende dalla frequenza della radiazione incidente e vale

$$\sigma_{\text{Th}} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\, m_e\, c^2} \right)^2 = \frac{8\pi}{3}\, r_0^2 \approx 66 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 = 66 \text{ barn} .$$

In queste circostanze il coefficiente di assorbimento dell'intensi\^a della radiazione che attraversa il materiale è legato a tutta la potenza diffusa da tutti gli elettroni ($= n_{\text{atomi}} \cdot Z$) e quindi al numero atomico Z. Più precisamente si può dimostrare (ed è stato fatto a lezione) che l'intensità della radiazione diminuisce esponenzialmente

$$I(x) = I(0)\, e^{-\mu x} ,$$

ed il coefficiente di assorbimento μ vale

$$\mu = \sigma_{\text{Th}} \cdot n_{\text{atomi}} \cdot Z = \sigma_{\text{Th}} \cdot \frac{\varrho N_A Z}{\mu_A}$$

dove $[\mu] = \text{cm}^{-1}$, se ϱ in gr/cm^3 (densità del materiale), μ_A in gr è il peso atomico. N_A e Z il numero di Avogadro ed il numero atomico. Da misure di $I(x)$ si risale a Z.

Il valore di alcune costanti:

velocità della luce nel vuoto: $c = 2.998 \times 10^8$ m/sec
costante di Planck: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J·sec $= 4.136 \times 10^{-15}$ eV·sec
costante di Boltzmann $K_B = 1.38065 \cdot 10^{-23}$ Joule / ^{0}K $= 1.38065 \cdot 10^{-16}$ erg/ ^{0}K.

utili conversioni

1 eV $= 1.602 \times 10^{-19}$ J; $h \cdot c = 19.865 \times 10^{-26}$ J·m $= 12.41 \times 10^3$ eV· Å.