Corso di Introduzione alla Fisica Quantistica (f)

Effetto fotoelettrico: esercizio con soluzioni

1.) In tabella è riportato il valore del potenziale di arresto (V_A) per diverse lunghezze d'onda incidenti su un elettrodo di sodio, come sperimentalmente trovate da Millikan nel suo esperimento sull'effetto fotoelettrico (Physical Review, vol. 7 (1916) p. 355) [1] :

$$\begin{pmatrix} \lambda\,(\text{nm}) & 312.5 & 365.0 & 404.7 & 433.9 & 546.1 \\ V_A\,(\text{Volt}) & 2.128 & 1.595 & 1.215 & 1.025 & 0.467 \end{pmatrix} .$$

i) Nel foglio di carta millimetrata fare un plot qualitativo dell'andamento del potenziale in funzione della **frequenza** (ν) della radiazione incidente ($V_A(\nu)$) e verificare che i punti si allineano intorno ad una retta. Assumendo (per una stima) di utlizzare i punti estremi come identificanti l'equazione della retta, stimare il lavoro di estrazione (W_0 in eV) del sodio, la costante di Planck (h in Joule·sec) come predetti da questo esperimento. Quale il valore di frequenza di soglia (ν_S)? e l'energia del fotone corrispondente (E_S)?

Soluzione i) possiamo cotruire una analoga tabella in funzione della frequenza ricordando che

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{2.998 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1}}{312.5 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \approx 9.594 \cdot 10^{14} \text{ Hz} , \qquad (1)$$

etc.. Si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \nu\,(10^{14}\,\text{Hz}) & 9.594 & 8.214 & 7.408 & 6.909 & 5.490 \\ V_A\,(\text{Volt}) & 2.128 & 1.595 & 1.215 & 1.025 & 0.467 \end{pmatrix} .$$

Si verifica che i dati sono praticamente allineati (si verificherebbe che un fit fornirebbe i coefficienti della retta $V_A = a + b \cdot 10^{-14}\,\nu$ come segue: $a = -1.784 \pm 0.057$ Volt, $b = 0.408 \pm 0.007$ Volt·sec). Il lavoro relativo al potenziale d'arresto coicide con l'energia cinetica degli elettroni prodotti dall'assorbineto del fotone secondo la teoria di Einstein, ovvero

$$e\,V_A = \frac{1}{2} m_e \mathbf{v}^2 = h\nu - W_0$$

[1] Si ricorda che il potenziale di arresto è il valore minimo della differenza di potenziale (inversa) da applicare agli elettrodi relativi all'effetto fotoelettrico in modo da arrestare il flusso di elettroni prodotti dalla radiazione incidente.

per cui $b \cdot 10^{-14} = \frac{h}{e}$ e $W_0 = -\frac{a}{e}$,

$$\begin{aligned}
h &= b \cdot 10^{-14}\, e \approx 0.408 \cdot 10^{-14} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \approx 6.53 \cdot 10^{-34} \text{ Joule} \cdot \text{sec} \\
W_0 &= -\frac{a}{e} = +\frac{1.78}{1.602 \cdot 10^{-19}} \text{ Joule} = 1.78 \text{ eV} \\
\nu_S &= \frac{W_0}{h} = \frac{1.78 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}}{6.53 \cdot 10^{-34}} \approx 4.37 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \\
E_S &= h\nu_S \equiv W_0 = 1.78 \text{ eV} \ .
\end{aligned}$$

Con il criterio suggerito nel testo una stima può essere fornita utilizzando i punti estremi, si ricava

$$\begin{aligned}
e\,V1_A &= h\nu_1 - W_0 \\
e\,V2_A &= h\nu_2 - W_0
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
h &= e\,\frac{V2_A - V1_A}{\nu_2 - \nu_1} = 1.602 \cdot 10^{-19}\, \frac{2.128 - 0.467}{(9.594 - 5.490) \cdot 10^{14}} \\
&\approx 6.5 \cdot 10^{-34} \text{ Joule} \cdot \text{sec} \\
W1_0 &= h\nu_1 - e\,V1_A \approx 1.75 \text{ eV} \\
W2_0 &= h\nu_2 - e\,V2_A \approx 1.82 \text{ eV} \\
W_0 &\approx \frac{W1_0 + W2_0}{2} \approx 1.79 \text{ eV} \qquad (2)
\end{aligned}$$

e così via.

ii) Si supponga ora di fa incidere, sullo stesso elettrodo di sodio, della radiazione X molto più energetica ($E = 1250$ eV) e quindi in grado di estrarre non solo gli elettroni **liberi** del sodio, ma anche quelli più profondamente **legati** in livelli atomici profondi. Sapendo che l'energia di legame (ϵ) degli elettroni nei livelli $1s$, $2s$ e $2p$ del sodio vale rispettivamente 1070 eV, 64 eV e 31 eV, stimare l'energia cinetica degli elettroni emessi da questi stati.

(*Attenzione al fatto che un elettrone reso libero* **nel** *metallo non è ancora un fotoelettrone estratto* **dal metallo**, *tanto che per estrarre elettroni* **liberi nel** *metallo occorre fare un lavoro di estrazione pari a* W_0.).

Soluzione ii)

Stato degli elettroni	ϵ (eV)	$E_{\rm cin} = h\nu - \epsilon - W_0$ (eV)
Elettroni di conduzione	0	1248.22
2p	31	1217.22
2s	64	1184.22
1s	1070	178.22

iii) Supponiamo ora che incida (sempre sullo stesso elettrodo) una radiazione ultavioletta praticamente monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda = 254$ nm ed intensità 20 mW/cm^2. Quale sarà il valore della densità di corrente dei fotoelettroni emessi? (ovvero la corrente di elettroni emessa per unità di superficie emittente (in Ampere/m^2))

Soluzione iii) Per $\lambda = 254$ nm, si ha

$$h\nu = \frac{h\,c}{\lambda} = \frac{12.41 \cdot 10^3 \text{ eV} \cdot \text{Å}}{2540 \text{ Å}} \approx 4.89 \text{ eV} \; ; \tag{3}$$

che è l'energia del fotone assorbito. L'intensità incidente fissa il numero di fotoni incidenti per unità di superficie

$$\frac{\text{n fotoni}}{\text{m}^2 \cdot \text{sec}} = \frac{20 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4 \text{ W/m}^2}{4.89 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ Joule}} = 2.55 \cdot 10^{20} \; ; \tag{4}$$

e quindi il numero di elettroni emessi al secondo per unità di superficie, nell'ipotesi che ad ogni fotone assorbito corrisponda un elettrone emesso:

$$\begin{aligned} j_e &= \frac{\text{n fotoni}}{\text{m}^2 \cdot \text{sec}} e = 2.55 \cdot 10^{20} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb} \\ &\approx 40.9 \text{ Ampere/m}^2 \end{aligned}$$

iv) Da ultimo incide sullo stesso elettrodo una radiazione proveniente da una lampada a tungsteno che lavora alla temperatura di (circa) 1000 ^{0}K. In queste circostanze la lunghezza d'onda corrispondente al picco di intensità emessa (sempre di 20 mW/cm^2) ha lunghezza d'onda $\lambda_{\rm max} \approx$ 3000 nm. Quale sarà il valore della densità di corrente dei fotoelettroni in corrispondenza di $\lambda_{\rm max}$?

Soluzione iv) In questo caso l'energia della radiazione incidente risulta

$$h\nu = \frac{h\,c}{\lambda} = \frac{12.41 \cdot 10^3 \text{ eV} \cdot \text{Å}}{30000 \text{ Å}} \approx 0.41 \text{ eV} < W_0 \ ; \qquad (5)$$

quindi non vi è emissione di alcun elettrone perché la radiazione incidente è "sotto soglia", come si usa dire.