Corso di Introduzione alla Fisica Quantistica (f)
Prova scritta 28 Giugno 2007 - (**tre ore a disposizione**)
[*sufficienza con punti 18 circa di cui almeno 4 dall'esercizio n. 5)*]

1.) *Una stazione radio trasmette emettendo una potenza di un kiloWatt alla frequenza di 900 kHz. Quanti fotoni emette al secondo? (***punti: 2***)*

2.) *Approssimando l'emissione di una lampada a filamento da 100 W come emissione da un corpo nero alla temperatura di 4000* ^0K*, trovare il numero di fotoni emessi al secondo (su metà angolo solido) per unità di superficie irradiante (***punti 3***) e stimare la frazione di essi emessa nella regione del visibile (si assumano come limiti di tale regione le lunghezze d'onda di 400 e 700 nm). (***punti: 5***)*
*(***bonus***) Da ultimo calcolare il numero* **totale** *di fotoni emessi al secondo (su metà angolo solido) dalla superficie complessiva del filamento. (***punti: 6***)*

3.) *Una piccola sfera d'argento (inizialmente scarica) viene sospesa in una camera a vuoto (le cui pareti sono mantenute a potenziale elettrico costante) e della luce ultravioletta di lunghezza d'onda* $\lambda = 200$ *nm viene indirizzata sulla sua superficie. Che differenza di potenziale elettrico acquisterà la sfera rispetto alle pareti che la circondano? (Il lavoro (*W_0*) per estrarre un elettrone dall'argento vale 4.7 eV).* (**punti: 5**)

4.) *Un atomo di massa* M *emette un fotone a seguito di una transizione interna di energia* ΔE*. Nel sistema di riferimento solidale con l'atomo l'energia del fotone emesso risulterà* $h\nu_0 = \Delta E$ *(conservazione dell'energia). Assumendo che l'atomo sia a riposo inizialmente nel laboratorio, si calcoli la correzione alla frequenza del fotone emesso nel laboratorio a causa del rinculo della massa* M *(si supponga che le variazioni di massa dovute all'emissione del fotone siano trascurabili). Si dimostri che*

$$\frac{h\nu}{h\nu_0} \to \left[1 - \frac{h\nu_0}{2Mc^2}\right] \quad \text{se} \quad \frac{h\nu_0}{Mc^2} \to 0 \ .$$

*[Il risultato è ottenibile sia in cinematica non relativistica (ragionevole nel caso atomico) che relativistica.] (***punti: 6***)*

5.) *Una particella di massa* m*, libera, in moto con energia* E *in una certa direzione (assunta come asse* x*) incontra una barriera di potenziale* $V_0 < E$ *posta ad* $x = 0$ *(ovvero l'energia potenziale vale* $V = 0$ *per* $x < 0$ *e* $V = V_0$ *per* $x > 0$*). Si scriva l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo nelle due zone:* $x < 0$ *(zona I) ed* $x > 0$ *(zona II) (***punti: 2***). Si dimostri che*

$$\begin{aligned} \phi_I(x) &= A_1\, e^{ikx} + B_1\, e^{-ikx} \\ \phi_{II}(x) &= A_2\, e^{i\alpha x} \end{aligned}$$

sono soluzioni e si trovi i valori di k *ed* α *e le loro dimensioni (***punti: 2***).*

*Discutere le condizioni fisiche per cui non è stato necessario sommare un termine del tipo $B_2\, e^{-i\alpha x}$ in $\phi_{II}(x)$ (che completerebbe la possibile soluzione da un punto di vista matematico) (***punti: 2***).*
Trovare le costanti (generalmente complesse) B_1 ed A_2 in funzione di A_1 scoprendo così che valgono le relazioni:

.

$$\begin{aligned} \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} &= \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2 \\ \frac{|A_2|^2}{|A_1|^2} &= \left(\frac{2}{1+\mu}\right)^2 \end{aligned}$$

*dove $\mu = \alpha/k$ (***punti: 4***).*
Calcolare la corrente di probabilità,

$$j_x = \frac{\hbar}{2mi}\left[\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial x} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial x}\right]$$

*nelle due zone ed interpretare i risultati in termini di correnti di probabilità incidenti, riflesse e trasmesse (***punti: 3***). Dimostrare che la corrente di probabilità incidente risulta la somma di quella riflessa e trasmessa (***punti: 3***).*
*Scrivere nelle due zone la funzione d'onda soluzione dell'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo, quali sono le frequenze delle onde nelle due zone? e le lunghezze d'onda? (***punti: 3***)*
*(***bonus***) Potremmo definire (per analogia) "un'indice di rifrazione" del mezzo II che renda conto dell'effetto di dipersione in tale mezzo (dove la particella è sottoposta ad un potenziale costante)? (si noti che nella zona I la particella è completamente libera). Dimostrare che la velocità di gruppo in entrambe le zone coincide con la velocità della particella classica. (***punti: 6***)*

Il valore di alcune costanti:
velocità della luce nel vuoto: $c = 2.998 \times 10^8$ m/sec
costante di Planck: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J·sec $= 4.136 \times 10^{-15}$ eV·sec
costante di Stefan $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ Joule/(m^2 sec ^{0}K^4)
utili conversioni
1 eV $= 1.602 \times 10^{-19}$ J; $h \cdot c = 19.865 \times 10^{-26}$ J·m $= 12.41 \times 10^3$ eV· Å.
formule utili:
$\int_0^\infty x^3/(e^x-1)dx = \pi^4/15$
$\int_0^\infty x^2/(e^x-1)dx = 2\zeta(3) = 2.4$
$\lim_{\epsilon\to 0} \sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{8}\epsilon^2$