Corso di Introduzione alla Fisica Quantistica (f)

Prova scritta 28 Giugno 2007 - (**tre ore a disposizione**)

Soluzione

1.) *Una stazione radio trasmette emettendo una potenza di un kiloWatt alla frequenza di 900 kHz. Quanti fotoni emette al secondo? (***punti: 2***)*

Ogni fotone emesso ha un'energia
$h\nu = [6.626 \times 10^{-34}$ Joule $\cdot$ sec]$\cdot$[9×10^5 Hz]= 5.96×10^{-28} Joule.
Il numero di fotoni al secondo emessi sarà dunque
10^3 Watt/(5.96×10^{-28} Joule) = 1.68×10^{30} fotoni / secondo.

2.) *Approssimando l'emissione di una lampada a filamento da 100 W come emissione da un corpo nero alla temperatura di 4000 ^{0}K, trovare il numero di fotoni emessi al secondo (su metà angolo solido) per unità di superficie irradiante (***punti 3***) e stimare la frazione di essi emessa nella regione del visibile (si assumano come limiti di tale regione le lunghezze d'onda di 400 e 700 nm). (***punti: 5***)*
*(***bonus***) Da ultimo calcolare il numero* **totale** *di fotoni emessi al secondo (su metà angolo solido) dalla superficie complessiva del filamento (***punti 6***)*

La potenza (energia per unità di tempo) emessa dall'unità di superficie del filamento per frequenze comprese tra $\nu \div \nu + d\nu$ in metà angolo solido è

$$S_\nu \, d\nu = \frac{c}{4} u_\nu \, d\nu = \frac{c}{4} \, \frac{8\pi}{c^3} \, \nu^2 \frac{h\nu}{e^{h\nu/(K_B T)} - 1} \, d\nu \ ,$$

ed il numero di fotoni emessi nello stesso intervallo è ottenibile dividendo per l'energia di un singolo fotone emesso $h\nu$. Così che il numero di fotoni (per unità di superficie emessi in un secondo) sarà dato dall'integrale

$$\mathcal{N}_\gamma = \int_0^\infty \frac{S_\nu \, d\nu}{h\nu} = \frac{4\pi}{c^2} \left(\frac{K_B T}{h} \right)^3 \int_0^\infty dx \, x^2/(e^x - 1) \approx 1.9 \times 10^{26} \text{ fotoni/m}^2\text{/sec} \ ,$$

avendo usato $\int_0^\infty dx \, x^2/(e^x - 1) = 2.4$ come suggerito nelle formule utili proposte alla fine del testo (e qui in fondo riportate).
Per calcolare il numero di fotoni emessi nella regione del visibile occorrerebbe valutare N_γ in tale regione, cioè il valore dell'integrale tra le frequenze che la limitano. Una stima può essere fornita assumendo di poter valutare l'integrale per mezzo del valore medio della funzione

$[\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \bar{f}\,(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))\,(x_2 - x_1)]$, ovvero

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\, \frac{x^2}{e^x - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_2^2}{e^{x_2} - 1} + \frac{x_1^2}{e^{x_1} - 1}\right)(x_2 - x_1) \approx 0.094 \cdot (x_2 - x_1) = 0.36\ .$$

Si noti che $x_1 = 5.15$ e $x_2 = 9.00$. Quindi la frazione percentuale

$$\frac{N_\gamma^{\text{visibile}}}{N_\gamma} \cdot 100 \approx \frac{0.36}{2.4} \cdot 100 = 15\%$$

ovvero solo il 15% (circa) di tutta la radiazione emessa viene emessa nel visibile (un calcolo più preciso fornirebbe un valore dell'integrale tale che la frazione sarebbe vicina al 20%).
per il bonus Per trovare il numero totale di fotoni emessi al secondo da tutta la superficie del filamento occore conoscere tale superficie. Per calcolarla occorre far ricorso al valore della potenza totale emessa (100 Watt) e alla legge di Stefan che da la potenza totale emessa, vale

$$\int_0^\infty S_\nu\, d\nu = \sigma T^4 \cdot Area = 100 \text{ Watt}$$

da cui

$$4000^4 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot Area = 100\ ,$$

ovvero $Area \approx 7 \cdot 10^{-6}$ m^2 e

$$N_\gamma^{\text{totale}} = 7 \cdot 10^{-6} \cdot 1.9 \cdot 10^{26} \approx 1.3 \cdot 10^{21} \text{ fotoni al secondo}\ .$$

3.) *Una piccola sfera d'argento (inizialmente scarica) viene sospesa in una camera a vuoto (le cui pareti sono mantenute a potenziale elettrico costante) e della luce ultravioletta di lunghezza d'onda $\lambda = 200$ nm viene indirizzata sulla sua superficie. Che differenza di potenziale elettrico acquisterà la sfera rispetto alle pareti che la circondano? (Il lavoro (W_0) per estrarre un elettrone dall'argento vale 4.7 eV).* (**punti: 5**)

I fotoni incidenti hanno energia

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{12.41 \cdot 10^3\,\text{eV} \cdot \text{Å}}{2000\,\AA} \approx 6.2\,\text{eV}$$

quindi sono in grado di estrarre elettroni dal metallo. Il potenziale elettrico della sfera diverrà man mano positivo rispetto al potenziale (mantenuto costante) delle pareti che la circondano. Il flusso di elettroni continuerà finché la sfera acquisterà un valore del potenziale *positivo rispetto alle pareti* tale da fornire un lavoro che uguagli la differenza tra l'energia del fotone incidente ed il lavoro di estrazione (potenziale d'arresto), in pratica quando

$$V_{\text{sfera}} \cdot |e| = h\nu - W_0 = 1.5 \text{ eV}$$

ovvero $V_{\text{sfera}} = +1.5$ Volt rispetto al potenziale costante delle pareti.

4.) *Un atomo di massa M emette un fotone a seguito di una transizione interna di energia ΔE. Nel sistema di riferimento solidale con l'atomo l'energia del fotone emesso risulterà $h\nu_0 = \Delta E$ (conservazione dell'energia). Assumendo che l'atomo sia a riposo inizialmente nel laboratorio, si calcoli la correzione alla frequenza del fotone emesso nel laboratorio a causa del rinculo della massa M (si supponga che le variazioni di massa dovute all'emissione del fotone siano trascurabili). Si dimostri che*

$$\frac{h\nu}{h\nu_0} \rightarrow \left[1 - \frac{h\nu_0}{2Mc^2}\right] \quad \text{se } \frac{h\nu_0}{Mc^2} \rightarrow 0 \ .$$

*Il risultato è ottenibile sia in cinematica non relativistica (ragionevole nel caso atomico) che relativistica. (***punti 6***)*

Nel sistema di laboratorio il fotone ha energia E_γ e quantità di moto $\mathbf{p}_\gamma$ e l'atomo energia cinetica T_A e quantità di moto $\mathbf{p}_A$. La conservazione dell'energia e della quantità di moto si scrive (usando cinematica non relativistica):

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_\gamma + T_A \\ \mathbf{p}_\gamma &= \mathbf{p}_A \ , \end{aligned}$$

dove valgono, per il fotone, le relazioni: $E_\gamma = |\mathbf{p}_\gamma| c = h\nu$. Ne deriva:

$$\Delta E = E_\gamma + \left(\frac{E_\gamma}{c}\right)^2 \frac{1}{2M_A}$$

ovvero

$$E_\gamma^2 + 2M_A c^2 E_\gamma - 2\Delta E\, M_A c^2 = 0 \ ,$$

risolvendo la quale otteniamo l'unica soluzione fisica che risponde alla condizione $E_\gamma \geq 0$

$$E_\gamma = M_A c^2 \left\{ \sqrt{1 + \frac{2\Delta E}{M_A c^2}} - 1 \right\} \approx M_A c^2 \left\{ 1 + \frac{2\Delta E}{2 M_A c^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{2\Delta E}{M_A c^2} \right)^2 - 1 \right\}$$

dove la seconda uguaglianza vale solo nel limite $M_A c^2 \ll \Delta E$ e si è utilizzata l'espansione $\sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{8}\epsilon^2$ (suggerita tra le formule utili). In conclusione la riduzione della formula porta all'espressione:

$$E_\gamma \approx \Delta E \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta E}{M_A c^2} \right) \ .$$

ovvero

$$\frac{h\nu}{h\nu_0} = \left[1 - \frac{h\nu_0}{2Mc^2} \right] \ ,$$

come richiesto.

Lo stesso risultato può essere ottenuto in maniera diretta trascurando la correzione del rinculo nell'energia del fotone emesso

$$|\mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}_\gamma| = \frac{h\nu}{c} \approx \frac{h\nu_0}{c} = \frac{\Delta E}{c} \ ,$$

in questa approssimazione

$$E_\gamma = \Delta E - T_A = \Delta E - \frac{\mathbf{p}_A^2}{2M_A} \approx \Delta E - \frac{(\Delta E)^2}{2 M_A c^2} = \Delta E \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta E}{M_A c^2} \right)$$

cioè

$$\frac{h\nu}{h\nu_0} = \left[1 - \frac{h\nu_0}{2Mc^2} \right] \ ,$$

come da dimostrare.

Utilizzando una cinematica relativistica si ottiene lo stesso risultato.

Infatti (conservazione dell'energia)

$$T_A = \sqrt{(\mathbf{p}_A c)^2 + (M_A c^2)^2} - M_A c^2 = \Delta E - E_\gamma \ ,$$

quindi

$$\left[\sqrt{(\mathbf{p}_A c)^2 + (M_A c^2)^2} \right]^2 = \left[\Delta E - E_\gamma + M_A c^2 \right]^2$$

si ottiene

$$E_\gamma = \Delta E \frac{1+\frac{\Delta E}{2M_A c^2}}{1+\frac{\Delta E}{M_A c^2}} \ ,$$

ovvero

$$\frac{h\nu}{h\nu_0} = \frac{1+\frac{h\nu_0}{2Mc^2}}{1+\frac{h\nu_0}{Mc^2}} \rightarrow \left[1-\frac{h\nu_0}{2Mc^2}\right] \quad \text{se} \quad \frac{h\nu_0}{Mc^2} \rightarrow 0 \ .$$

5.) *Una particella di massa m, libera, in moto con energia E in una certa direzione (assunta come asse x) incontra una barriera di potenziale $V_0 < E$ posta ad $x = 0$ (ovvero l'energia potenziale vale $V = 0$ per $x < 0$ e $V = V_0$ per $x > 0$). Si scriva l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo nelle due zone: $x < 0$ (zona I) ed $x > 0$ (zona II) (***punti: 2***). Si dimostri che*

$$\begin{aligned} \phi_I(x) &= A_1\, e^{ikx} + B_1\, e^{-ikx} \\ \phi_{II}(x) &= A_2\, e^{i\alpha x} \end{aligned}$$

*sono soluzioni e si trovi i valori di k ed α e le loro dimensioni (***punti 2***). Discutere le condizioni fisiche per cui non è stato necessario sommare un termine del tipo $B_2\, e^{-i\alpha x}$ in $\phi_{II}(x)$ (che completerebbe la possibile soluzione da un punto di vista matematico) (***punti: 2***).*

L'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo nelle due zone è

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} \qquad\qquad &= E\phi(x) \qquad \text{zona I} \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + V_0\phi(x) &= E\phi(x) \qquad \text{zona II} \ . \end{aligned}$$

da cui (sostituendo le soluzioni proposte)

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} > 0 \qquad \alpha^2 = \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2} > 0 \ ;$$

entrambe hanno dimensione di un numero d'onda (L^{-1}) e sono legati alle rispettive lunghezze d'onda da

$$\lambda_I = \frac{2\pi}{k} \qquad \lambda_{II} = \frac{2\pi}{\alpha} \ .$$

Trovare le costanti (generalmente complesse) B_1 ed A_2 in funzione di A_1 scoprendo così che valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} &= \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2 \\ \frac{|A_2|^2}{|A_1|^2} &= \left(\frac{2}{1+\mu}\right)^2 \end{aligned}$$

*dove $\mu = \alpha/k$ (**punti: 4**).*

Le costanti si trovano imponendo le condizioni al contorno in $x = 0$, cioè la continuità della funzione ϕ e della sua derivata prima ϕ'.

$$\begin{aligned} \phi_I(0) &= \phi_{II}(0) \ \Rightarrow \ A_1 + B_1 = A_2 \\ \phi'_I(0) &= \phi'_{II}(0) \ \Rightarrow \ ik(A_1 - B_1) = i\alpha A_2 \end{aligned}$$

da cui seguono le relazioni richieste. Non è necessario sommare il termine $B_2\, e^{-i\alpha x}$ in $\phi_{II}(x)$ se si assume che la particella proviene dalle regioni ad $x < 0$ e quindi non ci saranno termini "riflessi" in $x > 0$ dove i potenziale resta costante e la particella non incontra altre barriere. In $x > 0$ solo la soluzione progressiva (onda trasmessa) sarà presente (come risulterà più chiaro dalla successiva discussione sulle correnti di probabilità).

Calcolare la corrente di probabilità,

$$j_x = \frac{\hbar}{2mi}\left[\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial x} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial x}\right]$$

*nelle due zone ed interpretare i risultati in termini di correnti di probabilità incidenti, riflesse e trasmesse (**punti: 3**). Dimostrare che la corrente di probabilità incidente risulta la somma di quella riflessa e trasmessa (**punti: 3**).*
*Scrivere nelle due zone la funzione d'onda soluzione dell'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo, quali sono le frequenze delle onde nelle due zone? e le lunghezze d'onda? (**punti 3**)*

La corrente di probabilità nella zona I risulta

$$j_{x\,I} = \frac{\hbar}{2mi}\left[\phi_I^*\frac{\partial\phi_I}{\partial x} - \phi_I\frac{\partial\phi_I^*}{\partial x}\right] = \frac{\hbar k}{m}\left(|A_1|^2 - |B_1|^2\right) \ ;$$

interpretabile facilmente come un flusso incidente $\frac{\hbar k}{m}\,|A_1|^2$ con velocità $\mathbf{v_i} = (v_i, 0, 0) = (\hbar k/m, 0, 0) = (p/m, 0, 0)$ ed un flusso riflesso $-\frac{\hbar k}{m}\,|B_1|^2$ con velocità invertita $\mathbf{v_R} = (-v_i, 0, 0) = (-\hbar k/m, 0, 0) = (-p/m, 0, 0)$.
Nella zona II

$$j_{x\,II} = \frac{\hbar}{2mi}\left[\phi_{II}^*\frac{\partial\phi_{II}}{\partial x} - \phi_{II}\frac{\partial\phi_{II}^*}{\partial x}\right] = \frac{\hbar\alpha}{m}\,|A_2|^2\ .$$

In virtù delle relazioni tra $|A_1|^2$ e $|B_1|^2$ e $|A_2|^2$ si ha

$$\frac{\hbar k}{m}\,|B_1|^2 + \frac{\hbar\alpha}{m}\,|A_2|^2 = \frac{\hbar k}{m}\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2 |A_1|^2 + \frac{\hbar\alpha}{m}\left(\frac{2}{1+\mu}\right)^2 |A_1|^2 = \frac{\hbar k}{m}\,|A_1|^2\ ,$$

ovvero la somma del flusso riflesso e trasmesso uguaglia il flusso incidente.
La soluzione dipendente dal tempo si scrive

$$\begin{aligned} \psi_I(x,t) &= \phi_I(x)\ e^{-\frac{E}{\hbar}t} = A_1\, e^{i(kx-\omega t)} + B_1\, e^{-i(kx+\omega t)} && (1)\\ \psi_{II}(x,t) &= \phi_{II}(x)\, e^{-\frac{E}{\hbar}t} = A_2\, e^{i(kx-\omega t)}\ ; && (2) \end{aligned}$$

e le frequenze nelle due zone sono le stesse $\nu_I = \omega/2\pi = \nu_{II} = \omega/2\pi = E/h$, mentre le lunghezze d'onda sono diverse come già notato:

$$\lambda_I = \frac{2\pi}{k} \qquad \lambda_{II} = \frac{2\pi}{\alpha}\ .$$

(**bonus**) *Potremmo definire (per analogia) "un'indice di rifrazione" del mezzo II che renda conto dell'effetto di dipersione in tale mezzo (dove la particella è sottoposta ad un potenziale costante)? (si noti che nella zona I la particella è completamente libera). Dimostrare che la velocità di gruppo in entrambe le zone coincide con la velocità della particella classica.* (**punti 8**)

La velocità di fase nelle due zone può essere scritta, usando le (1,2),

$$\begin{aligned} v_I^{\text{fase}} &= \frac{\omega}{k} = \frac{E}{\hbar}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mE}} = \frac{E}{\sqrt{2mE}}\\ v_{II}^{\text{fase}} &= \frac{\omega}{\alpha} = \frac{E}{\hbar}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2m(E-V_0)}} = \frac{E}{\sqrt{2m(E-V_0)}} \end{aligned}$$

e la velocità di fase nel "mezzo" sarà (per definizione) la velocità di fase nel "vuoto" (cioè dove la particella è libera) divso "l'indice di rifrazione"

$$v_{II}^{\text{fase}} = \frac{v_I^{\text{fase}}}{n}$$

ovvero

$$n = \sqrt{\frac{E}{E - V_0}} \geq 1 \ ;$$

ovviamente se $V_0 = 0$, $n = 1$.
Per le velocità di gruppo

$$\begin{aligned} v_I^{\text{gruppo}} &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\frac{E}{\hbar} = \frac{d}{dk}\frac{\hbar k^2}{2m} = \frac{\hbar k}{m} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \frac{p_I}{m} \\ v_{II}^{\text{gruppo}} &= \frac{d\omega}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\frac{E}{\hbar} = \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{\hbar\alpha^2}{2m} + \frac{V_0}{\hbar}\right] = \frac{\hbar\alpha}{m} = \sqrt{\frac{2(E - V_0)}{m}} = \frac{p_{II}}{m} \ . \end{aligned}$$

Il valore di alcune costanti:
velocità della luce nel vuoto: $c = 2.998 \times 10^8$ m/sec
costante di Planck: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J·sec $= 4.136 \times 10^{-15}$ eV·sec
costante di Stefan $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ Joule/(m^2 sec ^{0}K^4)
utili conversioni
1 eV $= 1.602 \times 10^{-19}$ J; $h \cdot c = 19.865 \times 10^{-26}$ J·m $= 12.41 \times 10^3$ eV· Å.
formule utili:
$\int_0^\infty x^3/(e^x - 1)dx = \pi^4/15$
$\int_0^\infty x^2/(e^x - 1)dx = 2\zeta(3) = 2.4$
$\lim_{\epsilon \to 0} \sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{8}\epsilon^2$