Corso di Introduzione alla Fisica Quantistica (f)

Soluzioni Prova scritta 19 Giugno 2006

1.) In tabella è riportato il valore del potenziale di arresto (V_A) per diverse lunghezze d'onda incidenti su un elettrodo di sodio, come sperimentalmente trovate da Millikan nel suo esperimento sull'effetto fotoelettrico (Physical Review, vol. 7 (1916) p. 355) [1] :

$$\begin{pmatrix} \lambda\ (\text{nm}) & 312.5 & 365.0 & 404.7 & 433.9 & 546.1 \\ V_A\ (\text{Volt}) & 2.128 & 1.595 & 1.215 & 1.025 & 0.467 \end{pmatrix} .$$

i) Nel foglio di carta millimetrata fare un plot qualitativo dell'andamento del potenziale in funzione della **frequenza** (ν) della radiazione incidente ($V_A(\nu)$) e verificare che i punti si allineano intorno ad una retta. Assumendo (per una stima) di utlizzare i punti estremi come identificanti l'equazione della retta, stimare il lavoro di estrazione (W_0 in eV) del sodio, la costante di Planck (h in Joule·sec) come predetti da questo esperimento. Quale il valore di frequenza di soglia (ν_S)? e l'energia del fotone corrispondente (E_S)?

Soluzione i) possiamo cotruire una analoga tabella in funzione della frequenza ricordando che

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{2.998 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1}}{312.5 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \approx 9.594 \cdot 10^{14} \text{ Hz} , \tag{1}$$

etc.. Si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \nu\ (10^{14}\,\text{Hz}) & 9.594 & 8.214 & 7.408 & 6.909 & 5.490 \\ V_A\ (\text{Volt}) & 2.128 & 1.595 & 1.215 & 1.025 & 0.467 \end{pmatrix} .$$

Si verifica che i dati sono praticamente allineati (si verificherebbe che un fit fornirebbe i coefficienti della retta $V_A = a + b \cdot 10^{-14}\,\nu$ come segue: $a = -1.784 \pm 0.057$ Volt, $b = 0.408 \pm 0.007$ Volt·sec). Il lavoro relativo al potenziale d'arresto coicide con l'energia cinetica degli elettroni prodotti dall'assorbineto del fotone secondo la teoria di Einstein, ovvero

$$e\,V_A = \frac{1}{2} m_e \mathbf{v}^2 = h\nu - W_0$$

[1] Si ricorda che il potenziale di arresto è il valore minimo della differenza di potenziale (inversa) da applicare agli elettrodi relativi all'effetto fotoelettrico in modo da arrestare il flusso di elettroni prodotti dalla radiazione incidente.

per cui $b \cdot 10^{-14} = \frac{h}{e}$ e $W_0 = -\frac{a}{e}$,

$$\begin{aligned}
h &= b \cdot 10^{-14}\, e \approx 0.408 \cdot 10^{-14} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \approx 6.53 \cdot 10^{-34} \text{ Joule} \cdot \text{sec} \\
W_0 &= -\frac{a}{e} = +\frac{1.78}{1.602 \cdot 10^{-19}} \text{ Joule} = 1.78 \text{ eV} \\
\nu_S &= \frac{W_0}{h} = \frac{1.78 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}}{6.53 \cdot 10^{-34}} \approx 4.37 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \\
E_S &= h\nu_S \equiv W_0 = 1.78 \text{ eV} \ .
\end{aligned}$$

Con il criterio suggerito nel testo una stima può essere fornita utilizzando i punti estremi, si ricava

$$\begin{aligned}
e\,V1_A &= h\nu_1 - W_0 \\
e\,V2_A &= h\nu_2 - W_0
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
h &= e\,\frac{V2_A - V1_A}{\nu_2 - \nu_1} = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\frac{2.128 - 0.467}{(9.594 - 5.490) \cdot 10^{14}} \\
&\approx 6.5 \cdot 10^{-34} \text{ Joule} \cdot \text{sec} \\
W1_0 &= h\nu_1 - e\,V1_A \approx 1.75 \text{ eV} \\
W2_0 &= h\nu_2 - e\,V2_A \approx 1.82 \text{ eV} \\
W_0 &\approx \frac{W1_0 + W2_0}{2} \approx 1.79 \text{ eV} \qquad (2)
\end{aligned}$$

e così via.

ii) Si supponga ora di fa incidere, sullo stesso elettrodo di sodio, della radiazione X molto più energetica ($E = 1250$ eV) e quindi in grado di estrarre non solo gli elettroni **liberi** del sodio, ma anche quelli più profondamente **legati** in livelli atomici profondi. Sapendo che l'energia di legame (ϵ) degli elettroni nei livelli $1s$, $2s$ e $2p$ del sodio vale rispettivamente 1070 eV, 64 eV e 31 eV, stimare l'energia cinetica degli elettroni emessi da questi stati.

(*Attenzione al fatto che un elettrone reso libero* **nel** *metallo non è ancora un fotoelettrone estratto* **dal metallo**, *tanto che per estrarre elettroni* **liberi nel** *metallo occorre fare un lavoro di estrazione pari a* W_0.).

Soluzione ii)

Stato degli elettroni	ϵ (eV)	$E_{\rm cin} = h\nu - \epsilon - W_0$ (eV)
Elettroni di conduzione	0	1248.22
2p	31	1217.22
2s	64	1184.22
1s	1070	178.22

iii) Supponiamo ora che incida (sempre sullo stesso elettrodo) una radiazione ultavioletta praticamente monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda = 254$ nm ed intensità 20 mW/cm^2. Quale sarà il valore della densità di corrente dei fotoelettroni emessi? (ovvero la corrente di elettroni emessa per unità di superficie emittente (in Ampere/m^2))

Soluzione iii) Per $\lambda = 254$ nm, si ha

$$h\nu = \frac{h\,c}{\lambda} = \frac{12.41 \cdot 10^3 \text{ eV} \cdot \text{Å}}{2540 \text{ Å}} \approx 4.89 \text{ eV} \; ; \tag{3}$$

che è l'energia del fotone assorbito. L'intensità incidente fissa il numero di fotoni incidenti per unità di superficie

$$\frac{\text{n fotoni}}{\text{m}^2 \cdot \text{sec}} = \frac{20 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4 \text{ W/m}^2}{4.89 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ Joule}} = 2.55 \cdot 10^{20} \; ; \tag{4}$$

e quindi il numero di elettroni emessi al secondo per unità di superficie, nell'ipotesi che ad ogni fotone assorbito corrisponda un elettrone emesso:

$$\begin{aligned} j_e &= \frac{\text{n fotoni}}{\text{m}^2 \cdot \text{sec}} e = 2.55 \cdot 10^{20} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb} \\ &\approx 40.9 \text{ Ampere/m}^2 \end{aligned}$$

iv) Da ultimo incide sullo stesso elettrodo una radiazione proveniente da una lampada a tungsteno che lavora alla temperatura di (circa) 1000 ^{0}K. In queste circostanze la lunghezza d'onda corrispondente al picco di intensità emessa (sempre di 20 mW/cm^2) ha lunghezza d'onda $\lambda_{\rm max} \approx$ 3000 nm. Quale sarà il valore della densità di corrente dei fotoelettroni in corrispondenza di $\lambda_{\rm max}$?

Soluzione iv) In questo caso l'energia della radiazione incidente risulta

$$h\nu = \frac{h\,c}{\lambda} = \frac{12.41 \cdot 10^3 \text{ eV} \cdot \text{Å}}{30000 \text{ Å}} \approx 0.41 \text{ eV} < W_0 \ ; \tag{5}$$

quindi non vi è emissione di alcun elettrone perché la radiazione incidente è "sotto soglia", come si usa dire.

2.) Una particella di massa m è sottoposta ad una energia potenziale tale che per $x < 0$ (regione I) l'energia potenziale è costante e vale $V_0 = 4/3\,E$, dove E è l'energia totale della particella. Per $0 < x < L$ (regione II) l'energia potenziale è zero, mentre per $x > L$ (regione III) l'energia potenziale vale $1/3\,V_0$.

a) Qual è la forma matematica della soluzione dell'equazione di Schrödinger nella regione I?
(*Suggerimento: questa regione comprende la zona* $x \to -\infty$ *...*)
b) Quale il numero d'onda k_1 nella regione I in funzione di E?
c) Qual è la forma matematica della soluzione dell'equazione di Schrödinger nella regione II?
d) Quale il numero d'onda k_2 nella regione II in funzione di E?
e) Qual è la forma matematica della soluzione dell'equazione di Schrödinger nella regione III?
f) Quale il numero d'onda k_3 nella regione III in funzione di E?

Soluzione a),b),c),d),e),f) L'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo nelle tre regioni ha la forma

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}\,(E - V)\,\phi$$

e $(E - V)$ assume valori diversi **con segni diversi** nelle diverse regioni.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{regione I} & E - V & = & -\frac{1}{3}E < 0 \ \rightarrow -\frac{2m}{\hbar^2}\,(E - V) = \mathcal{K}_1^2 > 0 \ ; \\
\text{regione II} & E - V & = & E > 0 \ \rightarrow -\frac{2m}{\hbar^2}\,(E - V) = (i\,k_2)^2 < 0 \ ; \\
\text{regione III} & E - V & = & \frac{5}{9}E > 0 \ \rightarrow -\frac{2m}{\hbar^2}\,(E - V) = (i\,k_3)^2 < 0 \ ;
\end{array}$$

con $\mathcal{K}_1, k_2$ e k_3 reali. Infatti la forma matematica della soluzione connessa risulta diversa:

$$\begin{aligned}
\phi_I(x) &= A_1 e^{\mathcal{K}_1 x} + B_1 e^{-\mathcal{K}_1 x} \text{ con la condizione } B_1 = 0 \\
\phi_{II}(x) &= A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x} \\
\phi_{III}(x) &= A_3 e^{ik_3 x} + B_3 e^{-ik_3 x} \ .
\end{aligned}$$

La condizione $B_1 = 0$ deriva dall'altrimenti divergente comportamento per $x \to -\infty$ come da suggerimento nel testo.
Alternativamente

$$\left[\begin{array}{c}
\phi_I(x) = A_1 e^{\mathcal{K}_1 x} + B_1 e^{-\mathcal{K}_1 x} \text{ con la condizione } B_1 = 0 \\
\phi_{II}(x) = A'_2 \sin k_2 x + B'_2 \cos k_2 x \\
\phi_{III}(x) = A'_3 \sin k_3 x + B'_3 \cos k_3 x
\end{array} \right] .$$

Valgono le relazioni

$$\mathcal{K}_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{3}E} \ ; \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E} \ ; \quad k_3 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\frac{5}{9}E} \ .$$

g) Quali le condizioni al contorno per $x = 0$?
h) Quali le condizioni al contorno per $x = L$?

Soluzione g),h) Bisogna imporre la continuità delle funzioni e delle derivate prime. Cioè

$$\phi_1(0) = \phi_2(0) \qquad \text{e} \qquad \phi'_1(0) = \phi'_2(0)$$
$$\begin{aligned}
\phi_2(L) &= \phi_3(L) \\
\phi'_2(L) &= \phi'_3(L)
\end{aligned}$$

da cui

$$A_1 = A_2 + B_2 \qquad \text{e} \qquad \mathcal{K}_1 A_1 = ik_2(A_2 - B_2)$$
$$\begin{aligned}
A_2\, e^{ik_2 L} + B_2\, e^{-ik_2 L} &= A_3\, e^{ik_3 L} + B_3\, e^{-ik_3} \\
k_2 \left(A_2\, e^{ik_2 L} - B_2\, e^{-ik_2 L} \right) &= k_3 \left(A_3\, e^{ik_3 L} - B_3\, e^{-ik_3} \right)
\end{aligned}$$

Alternativamente

$$\left[\begin{array}{ccc} A_1 = B_2' & e & \mathcal{K}_1 A_1 = k_2 A_2' \\ A_2' \sin k_2 L + B_2' \cos k_2 L & = & A_3' \sin k_3 L + B_3' \cos k_3 L \\ k_2(A_2' \cos k_2 L - B_2' \sin k_2 L) & = & k_3(A_3' \cos k_3 L - B_3' \sin k_3 L) \end{array}\right].$$