Corso di Introduzione alla Fisica Quantistica (f)
Prova scritta 4 Luglio 2008 - (**tre ore a disposizione**)
[sufficienza con **punti** *18 circa di cui almeno 4 dagli esercizi nn. 3 e/o 4]*
[i **bonus** *possono essere utili per avere punti in più, non sono obbligatori]*

1.) La costante di Boltzmann K_B fu determinata per la prima volta nel 1906 da *Jean Baptiste Perrin* (1870 - 1942) osservando la distribuzione verticale del numero $n(z)$ per unità di volume, di piccole particelle di lattice in sospensione in acqua e raccolte in un cilindro di vetro. All'equilibrio la densità $n(z)$ obbedisce alla distribuzione di Boltzmann

$$n(z) = n(0)\, e^{-m^\star gz/K_B T} \ ; \tag{1}$$

dove g è l'accelerazione di gravità ($g = 9.81$ m/sec^2), $T = 290\,^0$K, la temperatura assoluta all'equilibrio, K_B la costante di Boltzmann ed $m^\star$ la massa effettiva delle particelle di lattice che, immerse in acqua, sono sottoposte alla spinta di Archimede. Il loro peso effettivo è così ridotto da mg a $m^\star g$. La massa della particella di lattice è determinata dalla misura delle sue dimensioni (sferette di raggio $a = 2.12 \times 10^{-7}$ m), nota la densità ($\varrho_{\rm Lat} = 1.194$ Kg/dm^3).
Sapendo che Perrin trovò 49 particelle per cm^3 all'altezza h e 14 particelle per cm^3 all'altezza $h + \Delta h = h + 60\,\mu$m, trovare: i) la massa effettiva e reale delle particelle di lattice (**punti: 2**), ii) la costante Boltzmann misurata nell'esperimento ed il conseguente valore del numero di Avogadro (**punti: 6**)).

2.) Qual è la velocità e l'energia cinetica di un neutrone con lunghezza d'onda di de Broglie $\lambda_{\rm dB} = 10^{-10}$ m ? È ancora un neutrone termico? (**punti: 2**)
Quali le lunghezze d'onda (in metri) e le quantità di moto (in Newton $\cdot$ sec) di fotoni di energia
$h\nu = 2$ eV; $h\nu = 2$ MeV? (**punti: 3**)
Un elettrone che possedesse le quantità di moto dei fotoni precedenti che velocità avrebbe? (**punti: 4**).

3.) La regola di quantizzazione del momento angolare introdotta da Bohr per trovare lo spettro delle energie dell'atomo di idrogeno, (nel caso di orbite circolari di raggio R)

$$|\mathbf{L}| = |\mathbf{p}|R = m|\mathbf{v}|R = n\hbar \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

potrebbe essere utilizzata per orbite circolari di altri potenziali centrali, ad esempio un'energia potenziale del tipo (k intero)

$$V(r) = V_0 \left(\frac{r}{a}\right)^k$$

dove a è un parametro fissato delle dimensioni di una lunghezza. Trovare che lo spettro dell'energia di una particella di massa m che percorre orbite circolari e obbedisce alla regola di quantizzazione di Bohr del momento angolare, è dato da

$$E_n = \frac{k+2}{2k} \left[\frac{n^2\hbar^2}{ma^2}\right] \left[\frac{n^2\hbar^2}{ma^2}\frac{1}{kV_0}\right]^{-\frac{2}{k+2}}$$

(**punti: 8**).
(**bonus**) Si noti che

$$\lim_{k\to\infty} E_n = \frac{1}{2}\frac{n^2\hbar^2}{ma^2} \ ,$$

indipendente da V_0. Si provi a commentare, notando che la funzione $V(r)$ per $k \to \infty$ si riduce a.... (**punti: 6**).

4.) Una particella di carica q e massa m è sottoposta ad un potenziale di oscillatore armonico ed ad un campo elettrico statico $\mathcal{E}$, di modo che la sua Hamiltoniana si scrive (il moto è unidimensionale)

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 - q\mathcal{E}x \ .$$

Quale risulta lo spettro dell'energia per questo sistema? (suggerimento: se si completa il quadrato $ax^2 - bx = a[(x - b/2a)^2 - (b/2a)^2]$ ....) (**punti: 6**). Come si scrive la funzione d'onda dello stato fondamentale sapendo che la stessa funzione d'onda nel caso $q = 0$ si scrive

$$\phi(x) = \frac{\alpha}{\pi^{1/4}}\, e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} \ \ ?$$

$[\alpha^2 = m\omega_0/\hbar]$ (**punti: 6**).

Il valore di alcune costanti:
velocità della luce nel vuoto: $c = 2.998 \times 10^8$ m/sec
costante di Planck: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J·sec $= 4.136 \times 10^{-15}$ eV·sec
costante molare dei gas: $R = 8.31\,\text{Joule}\,/(\text{mole}\cdot\,^0\text{K})$
massa del neutrone $m_n = 1.675 \times 10^{-27}$ Kg
massa dell'elettrone $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ Kg
massa del protone $m_p = 1.673 \times 10^{-27}$ Kg
utili conversioni
1 eV $= 1.602 \times 10^{-19}$ J; $h \cdot c = 19.865 \times 10^{-26}$ J·m $= 12.41 \times 10^3$ eV· Å.

soluzioni

1.) La massa effettiva e la massa reale delle particelle di lattice risultano

$$\begin{aligned} m^\star &= m - \frac{4}{3}\pi a^3 \varrho_{H_2O} = \frac{4}{3}\pi a^3 \ (\varrho_{\mathrm{Lat}} - \varrho_{\mathrm{H_2O}}) = \\ &= \frac{4}{3}\pi \left(2.12 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}\right)^3 \cdot \left(1.194 \times 10^3\,\mathrm{Kg/m^3} - 1.0 \times 10^3\,\mathrm{Kg/m^3}\right) = \\ &\approx 7.74 \times 10^{-18}\,\mathrm{Kg} \ ; \\ m &\approx 4.76 \times 10^{-17}\,\mathrm{Kg} \ . \end{aligned}$$

Dalla distribuzione verticale determinata sperimentalmente e dal valore della massa effettiva, si ricava la costante di Boltzmann, (confronta eq.(1))

$$\frac{n(h)}{n(h+\Delta h)} = e^{m^\star g \Delta h / K_B T}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow K_B &= \frac{m^\star g \Delta h}{T\ \ln\left[n(h)/n(h+\Delta h)\right]} = \\ &\approx \frac{7.74 \times 10^{-18}\,\mathrm{Kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m/sec^2} \cdot 60\ \times 10^{-6}\,\mathrm{m}}{290\,{}^0\mathrm{K} \cdot \ln\left[49/14\right]} = \\ &\approx 1.25 \times 10^{-23}\,\mathrm{Joule}/\,{}^0\mathrm{K} \ . \end{aligned}$$

Il valore accettato oggi è $K_B = 1.38 \times 10^{-23}\,\mathrm{Joule}/\,{}^0\mathrm{K}$.

$$\begin{aligned} N_A &= \frac{R}{K_B} = \frac{8.31\,\mathrm{Joule}\,/(\mathrm{mole} \cdot\ {}^0\,\mathrm{K})}{1.25 \times 10^{-23}\,\mathrm{Joule}/\,{}^0\mathrm{K}} = \\ &\approx 6.6 \times 10^{23}/\mathrm{mole} \end{aligned}$$

2.) La relazione di de Broglie

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathrm{dB}} &= \frac{h}{p} \ , \\ \Rightarrow v &= \frac{h}{m_n \lambda_{\mathrm{dB}}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{Joule}\ \cdot\ \mathrm{sec}}{1.67 \times 10^{-27}\,\mathrm{Kg}\ \cdot\ 10^{-10}\,\mathrm{m}} = \\ &= 3.97 \times 10^3\,\mathrm{m/sec} \ . \end{aligned}$$

Corrispondente ad un'energia cinetica

$$\frac{1}{2} m_n v^2 = 1.32 \times 10^{-20}\,\text{Joule} = 82\,\text{meV} \ .$$

Essendo, a $T \approx 300\,^0$K, $K_B T \approx 26$ meV, i neutroni sono (appena) sopra la soglia dei neutroni termici.

Per i fotoni: (le soluzioni includono anche il caso, non richiesto nel testo, di $h\nu = 0.1$ eV)

$$\begin{aligned}
h\nu = 0.1\,\text{eV} \ \Rightarrow\ p = \frac{h\nu}{c} &= \frac{0.1\,\text{eV}}{3 \times 10^8\,\text{m/sec}} = \\
&= \frac{0.1 \cdot 1.602 \times 10^{-19}\,\text{Joule}}{3 \times 10^8\,\text{m/sec}} = \\
&= 5.3 \times 10^{-29}\,\text{Newton} \cdot \text{sec} \ ; \\
h\nu = 0.1\,\text{eV} \ \Rightarrow\ \lambda = \frac{hc}{h\nu} &= \frac{12.41 \times 10^3\,\text{eV} \cdot \text{Å}}{0.1\,\text{eV}} = 12.41\,\mu\text{m} \ . \\
h\nu = \quad 2\,\text{eV} \ \Rightarrow\ p = \frac{h\nu}{c} &= \frac{2\,\text{eV}}{3 \times 10^8\,\text{m/sec}} = \\
&= \frac{2 \cdot 1.602 \times 10^{-19}\,\text{Joule}}{3 \times 10^8\,\text{m/sec}} = \\
&= 1.07 \times 10^{-27}\,\text{Newton} \cdot \text{sec} \ ; \\
h\nu = \quad 2\,\text{eV} \ \Rightarrow\ \lambda = \frac{hc}{h\nu} &= \frac{12.41 \times 10^3\,\text{eV} \cdot \text{Å}}{2\,\text{eV}} = 6200\,\text{Å} \ . \\
h\nu = 2\,\text{MeV} \ \Rightarrow\ p = \frac{h\nu}{c} &= \frac{2 \times 10^6\,\text{eV}}{3 \times 10^8\,\text{m/sec}} = \\
&= \frac{2 \times 10^6 \cdot 1.602 \times 10^{-19}\,\text{Joule}}{3 \times 10^8\,\text{m/sec}} = \\
&= 1.07 \times 10^{-21}\,\text{Newton} \cdot \text{sec} \ ; \\
h\nu = 2\,\text{MeV} \ \Rightarrow\ \lambda = \frac{hc}{h\nu} &= \frac{12.41 \times 10^3\,\text{eV} \cdot \text{Å}}{2 \times 10^6\,\text{eV}} = 6.2 \times 10^{-3}\,\text{Å} \ .
\end{aligned}$$

moto dell'elettrone:

L'elettrone è la particella carica più leggera ed il suo moto può risultare non descrvibile con la cinematica non relativistica. È questo il caso in cui la quantità di moto $|\mathbf{p}_e|$ sia confrontabile con $m_e c$, dove $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ Kg è

la massa a riposo dell'elettrone, ovvero quando $|\mathbf{p}_e|c$ o l'energia cinetica sia confrontabile con l'energia a riposo $m_e c^2 = 0.511$ MeV.
Evidentemente è questo il caso per un'energia del fotone pari a 2 MeV. In generale la velocità dell'elettrone può essere trovata, dato il suo impulso, dalla definizione relativistica dello stesso impulso

$$\mathbf{p}_e = \frac{m_e \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}$$

da cui

$$\frac{v}{c} = \frac{|\mathbf{v}|}{c} = \frac{|\mathbf{p}_e|c/(m_e c^2)}{\sqrt{1 + \left[\frac{|\mathbf{p}_e|c}{m_e c^2}\right]^2}} \ .$$

Solo nel limite $|\mathbf{p}_e|c/(m_e c^2) \to 0$ si ottiene l'approssimazione non relativistica

$$v = |\mathbf{v}| = \frac{|\mathbf{p}_e|}{m_e} \quad \text{ovvero} \quad \frac{v}{c} = \frac{|\mathbf{p}_e|c}{m_e c^2} \ .$$

In conclusione, usando per praticità le unità naturali e ricordando che si assume che la quantità di moto dell'elettrone è pari alla quantità di moto del fotone, ovvero

$$\frac{h\nu}{c} = |\mathbf{p}_e| \quad \text{cioè} \quad h\nu = |\mathbf{p}_e|c = p_e c$$

si ha

$$\begin{aligned}
h\nu = 0.1\,\mathrm{eV} \ \Rightarrow\ v = c\,\frac{p_e c}{m_e c^2} &= c\,\frac{0.1}{0.511 \times 10^6} = \\
&= 58.71\,\mathrm{m/sec}\ ; \\
h\nu = 0.1\,\mathrm{eV} \ \Rightarrow\ E_{\mathrm{kin}} = \frac{(p_e c)^2}{2m_e c^2} &= \frac{(0.1\,\mathrm{eV})^2}{2 \cdot 0.511 \times 10^6\,\mathrm{eV}} = \\
&= 1.96 \times 10^{-8}\,\mathrm{eV} = \\
&= 3.14 \times 10^{-27}\ \text{Joule}\ . \\
h\nu = \quad 2\,\mathrm{eV} \ \Rightarrow\ v = c\,\frac{p_e c}{m_e c^2} &= \frac{2}{0.511 \times 10^6} = \\
&= 1174.2\,\mathrm{m/sec}\ ; \\
h\nu = \quad 2\,\mathrm{eV} \ \Rightarrow\ E_{\mathrm{kin}} = \frac{(p_e c)^2}{2m_e c^2} &= \frac{(2\,\mathrm{eV})^2}{2 \cdot 0.511 \times 10^6\,\mathrm{eV}} = \\
&= 3.61 \times 10^{-6}\,\mathrm{eV} = 0.63 \times 10^{-24}\ \text{Joule}\ .
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
h\nu = 2\,\text{MeV} \;\Rightarrow\; v = c\,\frac{|\mathbf{p}_e|c/(m_e c^2)}{\sqrt{1+[|\mathbf{p}_e|c/m_e c^2]^2}} &= c \cdot 0.97 = \\
&= 2.9 \times 10^8\,\text{m/sec}\;, \\
h\nu = 2\,\text{MeV} \;\Rightarrow\; E_{\text{kin}} = \sqrt{(p_e c)^2 + (m_e c^2)^2} - m_e c^2 &= [\sqrt{(2)^2 + (0.51)^2} - 0.51]\,\text{MeV} = \\
&= 1.55\,\text{MeV} = 2.49 \times 10^{-13}\,\text{Joule}\;.
\end{aligned}
$$

Dunque per $h\nu = 2$ MeV l'uso della cinematica relativistica è di fondamentale importanza e la cinematica non relativistica è un'approssimazione non più valida (si potrebbe verificare che l'uso delle formule non relativistiche fornirebbe una velocità dell'elettrone ben maggiore di c!).

3.) Le orbite circolari sono caratterizzate da una relazione semplice tra la forza centripeta necessaria per mantenere il moto e la forza dinamica (centrale) che la produce. Nel caso presente l'energia potenziale $V(r)$ è legata alla forza da

$$F_r = -\frac{dV}{dr} = -V_0\,\frac{k}{a}\left(\frac{r}{a}\right)^k$$

quindi, per orbite di raggio R,

$$\frac{mv^2}{R} = V_0\,\frac{k}{a}\left(\frac{R}{a}\right)^k$$

ovvero

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kV_0\left(\frac{R}{a}\right)^k \quad . \tag{2}$$

L'energia risulta quindi funzione di R

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V_0\left(\frac{R}{a}\right)^k = \frac{k+2}{2}\,V_0\,\left(\frac{R}{a}\right)^k \quad . \tag{3}$$

D'altra parte la condizione di quantizzazione sul momento angolare quantizza anche i valori dei raggi possibili e quindi delle energie. Si ha, dalla (2):

$$mv = \sqrt{m^2v^2} = \left[mkV_o\left(\frac{R}{a}\right)^k\right]^{1/2}$$

e dalla condizione di quantizzazione:

$$
\begin{aligned}
L = mvR &= n\hbar \\
\Rightarrow L &= \left[mkV_o\left(\frac{R}{a}\right)^k\right]^{1/2} \cdot R = n\hbar\;,
\end{aligned}
$$

da cui

$$R = \left[\frac{a^{k/2}}{(mkV_0)^{1/2}} n\hbar \right]^{\frac{2}{k+2}} \quad ,$$

che inserita nell'espressione dell'energia (3) la trasforma, dopo qualche rimaneggiamento, in

$$E_n = \frac{k+2}{2k} \left[\frac{n^2\hbar^2}{ma^2} \right] \left[\frac{n^2\hbar^2}{ma^2} \frac{1}{kV_0} \right]^{-\frac{2}{k+2}} \quad ,$$

come indicato nel testo.

4.) Se si completa il quadrato come suggerito, l'Hamiltoniana diviene

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 \left(x - \frac{q\mathcal{E}}{m\omega_0^2} \right)^2 - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega_0^2} = \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 \left(x - x_0 \right)^2 - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega_0^2} = \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 \xi^2 - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega_0^2} = , \end{aligned}$$

ovvero l'Hamiltoniana che descrive una particella che oscilla (classicamente) intorno al nuovo punto di equilibrio x_0 fissato dalla presenza del campo elettrico e relativo al punto in cui forza elastica e forza elettrica si equilibrano ($m\omega_0^2 x_0 = q\mathcal{E}, \Rightarrow x_0 = q\mathcal{E}/m\omega_0^2$). In pratica si tratta di un oscillatore armonico con un nuovo punto di equilibrio ed il cui spostamento dall'equilibrio vale $\xi = x - x_0$. Inoltre l'Hamiltoniana contiene un termine additivo costante, l'energia risulta variata della stessa quantità. Lo spettro dell'energia risulta dunque quello di un oscillatore armonico con un termine additivo globale, in formula

$$E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{q^2\mathcal{E}^2}{m\omega_0^2} \ .$$

La funzione d'onda sarà la funzione d'onda dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico (data nel testo), ma ora lo spostamento a cui si riferisce vale $\xi = x - q\mathcal{E}/m\omega_0^2$, quindi

$$\phi(x) = \frac{\alpha}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{\alpha^2\xi^2}{2}} = \frac{\alpha}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}\left(x - \frac{q\mathcal{E}}{m\omega_0^2} \right)^2} \ .$$

Questo ragionamento (rigoroso) trova riscontro formalmente in un'equazione di Schrödinger che (essendo $dx = d\xi$) si scrive:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\phi(\xi)}{\partial\xi^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\xi^2\,\phi(\xi) = \left[E + \frac{1}{2}\frac{q^2\mathcal{E}^2}{m\omega_0^2}\right]\phi(\xi)\ ,$$

ovvero un'equazione di oscillatore armonico le cui soluzioni per lo spettro di energia sono note:

$$E_n + \frac{1}{2}\frac{q^2\mathcal{E}^2}{m\omega_0^2} = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right)\ ,$$

e funzione d'onda del fondamentale come già discusso (si noti che la frequenza propria dell'oscillatore non cambia).