Corso di Introduzione alla Fisica Quantistica (f)

Prova scritta 30 giugno 2009 - (**tre ore a disposizione**)

[sufficienza con **punti** *18 circa di cui almeno 4 dall'esercizio n. 3]*

[i **bonus** *possono essere utili per avere punti in più]*

1.) Il positronio è un sistema legato di un elettrone ed un positrone (masse uguali e cariche opposte).

a) calcolare l'energia di legame $E_{\rm B}$ del positronio utilizzando le ipotesi di Bohr per i sistemi legati (come l'atomo di idrogeno); (**punti: 4**).

Un modo di decadimento del positronio è l'annichilazione di eletttrone e positrone in due fotoni ($e^+ + e^- \to 2\gamma$, la vita media per questo decadimento è $\tau_{2\gamma} \simeq 1.25 \times 10^{-10}$ sec);

b) se il positronio decade in quiete in due fotoni, calcolare l'energia di ciascun fotone e la loro lunghezza d'onda; (**punti: 2**).

I fotoni di decadimento del positronio vengono rivelati mediante effetto Compton su elettroni.

c) calcolare la massima energia che ogni fotone può cedere ad un elettrone per effetto Compton; (**punti: 2**);

d) se questi stessi elettroni si trovano in un campo magnetico uniforme di 0.1 Tesla, calcolare il raggio di curvatura della traiettoria degli elettroni di cui alla domanda c); (**punti: 4**).

2.) I fotoni emessi nelle transizioni fra livelli di un atomo danno luogo alle sue righe spettrali. Le frequenze ν_i delle righe osservate, hanno una larghezza $\Delta\nu_i$ non nulla, detta larghezza naturale della riga, dovuta alla vita media della transizione, cioè al tempo medio τ di decadimento.

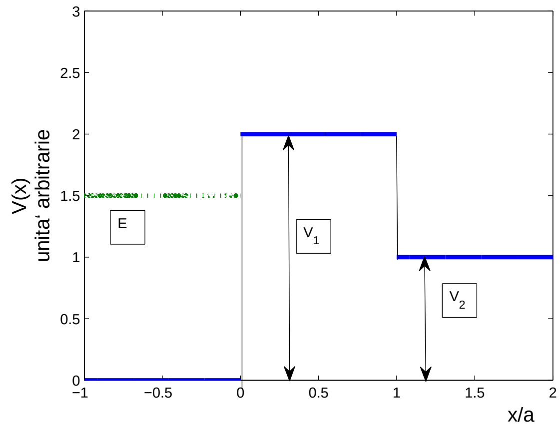
a) Se τ è la vita media della transizione, qual è la "lunghezza" media del treno d'onda emesso, cioè l'indeterminazione Δx sulla posizione del fotone emesso? (**punti: 2**)

La luce gialla di una lampada al sodio ha lunghezza d'onda $\lambda = 5890$ Å, la vita media della transizione è $\tau = 1.6 \times 10^{-8}$ sec;

b) calcolare l'indeterminazione Δp sull'impulso dei fotoni emessi e l'indeterminazione $\Delta\nu$ sulla loro frequenza. (*si assuma come stima $\Delta p \cdot \Delta x \simeq h$, dove h è la costante di Planck*). Il $\Delta\nu$ calcolato è la larghezza naturale della riga del sodio; (**punti: 2**).

c) Calcolare $\Delta\nu/\nu$ e verificare che $\Delta\nu/\nu = \Delta\lambda/\lambda$; (**punti: 2**);

d) Calcolare, in eV, l'energia E dei fotoni emessi e l'indeterminazione ΔE. Si verifichi che vale $\Delta E \cdot \tau \simeq h$; (**punti: 4**).



3.) Si consideri una barriera di potenziale $V(x)$ in una dimensione, tale che

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 \quad \text{per} \quad x < 0\,; \\ V(x) &= V_1 \quad \text{per} \quad 0 < x < a\,; \\ V(x) &= V_2 \quad \text{per} \quad x > a\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Sia $V_1 > 0$, $V_2 > 0$, $V_2 < V_1$ (vedi figura).

a) Si scriva (per l'intero dominio delle x) l'equazione di Schrödinger (indipendente dal tempo) per un fascio di particelle di massa m ed energia cinetica E, ($V_2 < E < V_1$), incidenti sulla barriera dalla zona delle $x < 0$; (**punti: 4**).

b) Le funzioni d'onda

$$\begin{aligned} \text{zona I} \quad \phi_I(x) &= e^{ik_1x} + Re^{-ik_2x} \quad && x < 0\,; \quad (2) \\ \text{zona II} \quad \phi_{II}(x) &= Ae^{\gamma_1 x} + Be^{-\gamma_2 x} \quad && 0 < x < a\,; \quad (3) \\ \text{zona III} \quad \phi_{III}(x) &= Te^{ik_3x} \quad && x > a\,; \quad (4) \end{aligned}$$

sono soluzioni dell'equazione di Schrödinger relativa alle tre diverse zone? $k_{1,2,3}$ e $\gamma_{1,2}$ sono univocamente determinati? quanto valgono? (**punti: 3**).

c) Scrivere esplicitamente le condizioni imposte alla funzione d'onda nei punti $x = 0$, $x = a$ perché la soluzione sia interpretabile fisicamente; (**punti: 3**).

d) (**bonus**) Scrivere la funzione d'onda completa dipendente dal tempo nelle tre zone; (**punti 3**).

e) (**bonus**) Ridiscutere il problema per $0 < E < V_2$; (**punti: 6**).

Il valore di alcune costanti:
velocità della luce nel vuoto: $c = 2.998 \times 10^8$ m/sec
costante di Planck: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J·sec $= 4.136 \times 10^{-15}$ eV·sec
massa dell'elettrone $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ Kg
utili conversioni
1 eV $= 1.602 \times 10^{-19}$ J; $\quad h \cdot c = 19.865 \times 10^{-26}$ J·m $= 12.41 \times 10^3$ eV· Å.

soluzioni

1.) Il positronio si differenzia dall'atomo di idrogeno esclusivamente per il diverso valore della massa ridotta m dell'elettrone, che nell'atomo di idrogeno differisce di molto poco dalla massa m_e dell'elettrone ($m = m_e(1 + m_e/m_p)^{-1}$, con $m_e/m_p \approx 1/1836$), mentre nel positronio è la metà della massa m_e dell'elettrone e del positrone (infatti nel positronio $m_p \to m_e$). Di conseguenza il raggio, a, dello stato fondamentale del positronio vale (praticamente) il doppio del raggio di Bohr $a_0 = \hbar^2/(k_e e^2 m)$ dell'atomo di idrogeno.

a) $E_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\frac{k_e e^2}{a} = \frac{1}{2}\frac{k_e e^2}{2a_0} = \frac{1}{2}13.6 \text{ eV} = 6.8 \text{ eV}.$

b) Siccome il positronio decade in quiete i due fotoni hanno quantità di moto uguali ed opposte e quindi la stessa energia (l'energia di legame è trascurabile):
$E_\gamma = h\nu = \frac{1}{2}\left[2m_e c^2 - E_{\mathrm{B}}\right] \approx m_e c^2 = 0.51 \text{ MeV}$; $\lambda = \frac{hc}{h\nu} = \frac{12.41\times10^3 \text{ eV}\cdot\mathring{\mathrm{A}}}{0.51\times10^6 \text{ eV}} = 0.024$ Å;
che è la lunghezza d'onda Compton $\lambda_C = h/(m_e c)$ dell'elettrone.

c) Il fotone cede la massima energia all'elettrone (per effetto Compton) quando viene diffuso all'indietro ($\vartheta = 180°$). In questo caso la lunghezza d'onda λ' del fotone diffuso è (si ricordi che vale $\lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\vartheta)$, da cui:
$\lambda' = \lambda + 2\lambda_C = 3\lambda_C \Rightarrow E_\gamma^{\mathrm{f}} = \frac{1}{3}E_\gamma^{\mathrm{i}}$;
quindi l'energia ceduta all'elettrone è:
$E_e = E_\gamma^{\mathrm{i}} - E_\gamma^{\mathrm{f}} = \frac{2}{3}E_\gamma^{\mathrm{i}} = \frac{2}{3}m_e c^2 \approx 0.34$ MeV.

d) La quantità di moto dell'elettrone è pari alla differenza delle quantità di moto (iniziale e finale) del fotone:
$p_e = \frac{E_\gamma^{\mathrm{i}}}{c} - \frac{-E_\gamma^{\mathrm{f}}}{c} = \frac{4}{3}m_e c$;
quindi il raggio di curvatura della traiettoria dell'elettrone è (dall'espressione della forza di Lorentz che produce la frorza centripeta necessaria al moto circolare: $mv_e^2/R = |e|v_e B$)
$R = \frac{p_e}{|e|B} = \frac{4m_e c}{3|e|B} \approx 2.28$ cm. dove $p_e = mv_e = \frac{m_e v_e}{\sqrt{1-v_e^2/c^2}}$.

2.) a) $\Delta x \simeq c\cdot\tau = 4.8$ m.

b) $\Delta p \simeq \frac{h}{\Delta x} = \frac{h}{c\tau}$; $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c} \Rightarrow \Delta\nu = \frac{c\Delta p}{h} \simeq \frac{1}{\tau} = 6.2\times10^7$ Hz.
$\nu = \frac{c}{\lambda} \simeq 5\times10^{14}$ Hz.

c) $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\lambda}{c}\Delta\nu \simeq \frac{\lambda}{c}\frac{1}{\tau} = 1.2\times10^{-7}$;

d) $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \approx \frac{12.4\times10^3 \text{ eV}\cdot\mathring{\mathrm{A}}}{5890 \mathring{\mathrm{A}}} = 2.11$ eV;
$\frac{\Delta E}{E} = \frac{h\Delta\nu}{h\nu} \Rightarrow \Delta E \simeq 2.5\times10^{-7}$ eV; $\tau\cdot\Delta E \simeq \frac{\Delta E}{\Delta\nu} = h$.
Essendo $\lambda = \frac{c}{\nu}$, si ha $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\nu}{\nu^2\lambda}c = \frac{\Delta\nu}{\nu}$.

3.) a) L'equazione di Schrödinger $\hat{H}\phi(x) = E\phi(x)$, per le tre diverse zone dell'asse x, si scrive:

$$\text{zona I} \qquad x < 0 \qquad \frac{d^2\phi_I(x)}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}E\,\phi_I(x)\ ; \tag{5}$$

$$\text{zona II} \quad 0 < x < a \quad \frac{d^2\phi_{II}(x)}{dx^2} = +\frac{2m}{\hbar^2}(V_1 - E)\,\phi_{II}(x) \tag{6}$$

$$\text{zona III} \quad x > a \quad \frac{d^2\phi_{III}(x)}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_2)\,\phi_{III}(x)\;; \tag{7}$$

da cui

$$\begin{aligned} k_1^2 = k_2^2 = k^2 &= \frac{2m}{\hbar^2}E\;; \\ \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma^2 &= \frac{2m}{\hbar^2}(V_1 - E)\;. \\ k_3^2 &= \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_2)\;; \end{aligned}$$

b) Che le funzioni d'onda (2)-(4) siano soluzioni è verificabile per sostituzione diretta.

c) Perché $|\phi|^2$ sia interpretabile come densità di probabilità la funzione d'onda deve essere continua, inoltre la derivata prima debbono essere continnua per poter definire una corrente di probabilità. Di conseguenza

$$1 + R = A + B\;; \tag{8}$$

$$1 - R = -i\frac{\gamma}{k}(A - B)\;; \tag{9}$$

per la continuità in $x = 0$ (ovvero $\phi_I(0) = \phi_{II}(0)$ e $\phi'_I(0) = \phi'_{II}(0)$), inoltre

$$A\,e^{\gamma a} + B\,e^{-\gamma a} = T\,e^{ik_3 a}\;; \tag{10}$$

$$\gamma\left(A\,e^{\gamma a} - B\,e^{-\gamma a}\right) = ik_3\,T\,e^{ik_3 a}\;; \tag{11}$$

per la continuità in $x = a$ (ovvero $\phi_{II}(a) = \phi_{III}(a)$ e $\phi'_{II}(a) = \phi'_{III}(a)$).

d) (**bonus**) L'energia della particella resta la stessa in tutte e tre le zone, quindi

$$\begin{aligned} \psi_I(x,t) &= \phi_I(x)\,e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\;; \\ \psi_{II}(x,t) &= \phi_{II}(x)\,e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\;; \\ \psi_{III}(x,t) &= \phi_{III}(x)\,e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\;. \end{aligned}$$

e) (**bonus**) Nel caso in cui $E < V_2$ (e quindi anche $E < V_1$), la soluzione nelle zone I e II resta invariata, nella zona III è sufficiente sostituire $k_3 \to ik_3$ in tutte le equazioni, con $k_3 = \sqrt{(2m/\hbar^2)|(E - V_2)|}$. La soluzione ϕ_{III} risulterà in una forma esponenzioale decrescente: $\phi_{III}(x) = Te^{-k_3 x}$.