Principio di indeterminazione e larghezza naturale della riga emessa.

Uno stato che abbia un'indeterminazione ΔE nella sua energia (e non è quindi stazionario), ha una vita media data da

$$\Delta E \cdot \tau \geq \frac{\hbar}{2} \ . \qquad (1)$$

L'equazione (1) è conseguenza delle proprietà delle trasformate di Fourier per pacchetti definiti negli spazi ω, t

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int d\omega \ g(\omega) \ e^{-i\omega t} \ ; \\ g(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int dt \ f(t) \ e^{+i\omega t} \ ; \end{aligned}$$

ovvero della disuguaglianza

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \geq \frac{1}{2} \ , \qquad (2)$$

e della relazione $E = h\nu = \hbar\omega$ introdotta da de Broglie per le onde associate a particelle, ovvero

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \ . \qquad (3)$$

Nel caso del decadimento di uno stato con emissione di fotoni, la larghezza della riga emessa $\Delta\lambda$ dipenderà dall'indeterminazione nell'energia ΔE dello stato e quindi dalla sua vita media in vista della relazione (1). La stima della vita media dello stato tramite la larghezza della riga segue dalle

$$\Delta E \cdot \tau \geq \frac{\hbar}{2} \quad \rightarrow \quad h\Delta\nu \cdot \tau \geq \frac{h}{4\pi} \quad \rightarrow \quad \Delta\nu \cdot \tau \geq \frac{1}{4\pi} \ , \qquad (4)$$

relazione indipendente dalla costante di Planck! Infatti le stesse relazioni sono ottenibili in fisica classica nel modello a elettroni oscillanti.
La (4) può essere scritta in funzione della larghezza della riga in λ ricordando che $\lambda\nu = c$, ovvero $(\Delta\lambda)\,\nu + (\Delta\nu)\,\lambda = 0$, per cui

$$\Delta\nu = c\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

che inserita nella (4) fornisce

$$\Delta\lambda \cdot \tau \geq \frac{\lambda^2}{4\pi c} \ . \tag{5}$$

Nel modello ad elettroni oscillanti tale relazione emerge dal calcolo dell'intensità della riga emessa[1]:

$$I(\omega) = I_0 \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$$

e normalizzata in modo tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega) d\omega = I_0$. La larghezza della riga $\Delta\omega$, misurata a metà altezza, risulta

$$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = (\omega_0 + \gamma/2) - (\omega_0 - \gamma/2) = \gamma = \frac{2}{\tau} \ ; \tag{6}$$

da cui

$$\Delta\omega \cdot \tau \approx 1 \ ; \tag{7}$$

che fornisce

$$\Delta\lambda \cdot \tau \approx \frac{\lambda^2}{2\pi c} \ . \tag{8}$$

da confrontarssi con la (5).

[1] vedi appunti relativi