Esercizio: rinculo dell'atomo nell'emissione

Valutare la diminuzione della frequenza delle righe Balmer emesse da un atomo di idrogeno quando si tiene conto del rinculo dell'atomo stesso.

L'espressione (**??**) assume che la variazione di energia interna dell'atomo dal passare dal livello $n > 2$ al livello $m = 2$ sia uguale all'energia del fotone emesso e trascura il rinculo dell'atomo. In verità, assumendo l'atomo a riposo nello stato iniziale, l'emissione del fotone produce un rinculo dell'atomo determinata dalla conservazione della quantità di moto, rinculo che produce una variazione di energia cinetica dell'atomo. In definitiva l'energia del fotone emesso risulta più piccola perchúna parte della variazione di energia interna $(E_n - E_2)$ va in energia cinetica dell'atomo. In formule

$$\begin{aligned} E_n - E_2 &= E_\gamma + \frac{\mathbf{p}^2_{\text{atomo}}}{2M_{\text{atomo}}} \\ \mathbf{p}_\gamma + \mathbf{p}_{\text{atomo}} &= 0 \ , \end{aligned}$$

dove $E_\gamma = h\nu$ e $|\mathbf{p}_\gamma| = \frac{h\nu}{c}$
In conclusione, tenendo conto che l'emissione del fotone avviene nel verso opposto al rinculo dell'atomo (stessa direzione) potremmo scrivere:

$$\begin{aligned} h\nu &= E_n - E_2 - \frac{p^2_{\text{atomo}}}{2M_{\text{atomo}}} = \\ &= h\nu_0 - \frac{p^2_{\text{atomo}}}{2M_{\text{atomo}}} = \\ &= R_H hc \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{p^2_{\text{atomo}}}{2M_{\text{atomo}}} \ ; \qquad (1) \\ \frac{h\nu}{c} &= p_{\text{atomo}} \ . \qquad (2) \end{aligned}$$

dove $h\nu_0$ è proprio l'energia interna, ovvero l'energia del fotone emesso trascurando il rinculo atomico.
In definitiva l'equazione da risolvere per ottenere la frequenza del fotone emesso, si ottiene sostituendo p_{atomo} dalla (2) nella (1), cioè

$$\frac{1}{2M_{\text{atomo}}c^2}(h\nu)^2 + (h\nu) - h\nu_0 = 0 \ ; \qquad (3)$$

da cui la sola radice positiva

$$h\nu = M_{\text{atomo}}c^2 \left[\sqrt{1 + 2\frac{h\nu_0}{M_{\text{atomo}}c^2}} - 1\right] \ .$$

L'espressione precedente può essere eventualmente semplificata notando che $h\nu_0$ è dell'ordine degli elettronvolt, mentre $M_{\rm atomo}c^2$ dell'ordine di 10^6 eV, ovvero $h\nu_0 \ll M_{\rm atomo}c^2$, per cui (da $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + ...$)

$$h\nu \approx h\nu_0 \left[1 - \frac{h\nu_0}{2M_{\rm atomo}c^2}\right] \ . \tag{4}$$

Lo stesso risultato poteva immediatamente essere ottenuto dall'equazione (3) assumendo che la correzione sulla frequenza fosse piccola (come evidente fin dall'inizio), ovvero

$$\frac{(h\nu)^2}{2M_{\rm atomo}c^2} \approx \frac{(h\nu_0)^2}{2M_{\rm atomo}c^2} \ ,$$

che sostituita nella (3) conduce alla soluzione

$$h\nu_0 - h\nu \approx \frac{(h\nu_0)^2}{2M_{\rm atomo}c^2} \ ,$$

in accordo con la (4). Si lascia al lettore lo studio numerico e la rilecabilità degli effetti il cui ordine di grandezza è stato già discusso.