Introduzione alla Fisica Quantistica **Scheda n. 1**
esercizi proposti e discussi in aula

1.) La costante di Boltzmann K_B fu determinata per la prima volta nel 1906 da *Jean Baptiste Perrin* (1870 - 1942) osservando la distribuzione verticale del numero $n(z)$ per unità di volume, di piccole particelle di lattice in sospensione in acqua e raccolte in un cilindro di vetro. All'equilibrio la densità $n(z)$ obbedisce alla distribuzione di Boltzmann

$$n(z) = n(0)\, e^{-m^\star gz/K_BT} \; ; \tag{1}$$

dove g è l'accelerazione di gravità ($g = 9.81$ m/sec^2), $T = 290\,^0$K, la temperatura assoluta all'equilibrio, K_B la costante di Boltzmann ed $m^\star$ la massa effettiva delle particelle di lattice che, immerse in acqua, sono sottoposte alla spinta di Archimede. Il loro peso effettivo è così ridotto da mg a $m^\star g$. La massa della particella di lattice è determinata dalla misura delle sue dimensioni (sferette di raggio $a = 2.12 \times 10^{-7}$ m), nota la densità ($\varrho_{\mathrm{Lat}} = 1.194$ Kg/dm^3).
Sapendo che Perrin trovò 49 particelle per cm^3 all'altezza h e 14 particelle per cm^3 all'altezza $h + \Delta h = h + 60\,\mu$m, trovare: i) la massa effettiva e reale delle particelle di lattice (**punti: 2**), ii) la costante Boltzmann misurata nell'esperimento ed il conseguente valore del numero di Avogadro (**punti: 6**)).

2.) Il numero di particelle α (alfa) ($z = 2$) diffuse all'indietro ($\theta \geq 90^0$), è determinato dalla sezione d'urto Rutherford all'indietro (*backward*)

$$\sigma_{back} = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)\bigg|_{\mathrm{Ruth}} d\Omega = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)\bigg|_{\mathrm{Ruth}} 2\pi \sin\theta d\theta = \pi \left[k_e \frac{Zze^2}{2T_\alpha}\right]^2 \; .$$

Si consideri la diffusione di particelle α di energia cinetica $T_\alpha = 5.30$ MeV da fogli di Nichel (numero atomico $Z = 28$ e peso atomico $\mu_A = 58.7$) e di Cromo ($\mu_A = 52.0$ e Z da determinare). I fogli sono stati laminati in modo da avere ugual peso per unità di superficie $W = 0.4$ gr/cm^2. Sapendo che il numero di particelle α diffuse indietro dal Cromo risulta essere solo l' 83% di quelle diffuse dal Nichel nello stesso intervallo di tempo, determinare il numero atomico del Cromo.

Il valore di alcune costanti:
velocità della luce nel vuoto: $c = 2.998 \times 10^8$ m/sec
costante di Planck: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J·sec $= 4.136 \times 10^{-15}$ eV·sec
costante molare dei gas: $R = 8.31\,\mathrm{Joule}/(\mathrm{mole} \cdot {}^0\mathrm{K})$
massa del neutrone $m_n = 1.675 \times 10^{-27}$ Kg
massa dell'elettrone $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ Kg
massa del protone $m_p = 1.673 \times 10^{-27}$ Kg
utili conversioni
1 eV $= 1.602 \times 10^{-19}$ J; $h \cdot c = 19.865 \times 10^{-26}$ J·m $= 12.41 \times 10^3$ eV· Å.

soluzione

1.) La massa effettiva e la massa reale delle particelle di lattice risultano

$$\begin{aligned}
m^\star &= m - \frac{4}{3}\pi a^3 \varrho_{H_2O} = \frac{4}{3}\pi a^3\ (\varrho_{\rm Lat} - \varrho_{\rm H_2O}) = \\
&= \frac{4}{3}\pi \left(2.12\times 10^{-7}\,{\rm m}\right)^3 \cdot \left(1.194\times 10^3\,{\rm Kg/m^3} - 1.0\times 10^3\,{\rm Kg/m^3}\right) = \\
&\approx 7.74\times 10^{-18}\,{\rm Kg}\ ; \\
m &\approx 4.76\times 10^{-17}\,{\rm Kg}\ .
\end{aligned}$$

Dalla distribuzione verticale determinata sperimentalmente e dal valore della massa effettiva, si ricava la costante di Boltzmann, (confronta eq.(1))

$$\frac{n(h)}{n(h+\Delta h)} = e^{m^\star g\Delta h/K_B T}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow K_B &= \frac{m^\star g \Delta h}{T\ \ln\left[n(h)/n(h+\Delta h)\right]} = \\
&\approx \frac{7.74\times 10^{-18}\,{\rm Kg}\cdot 9.81\,{\rm m/sec^2}\cdot 60\ \times 10^{-6}\,{\rm m}}{290\,^0{\rm K}\cdot \ln\left[49/14\right]} = \\
&\approx 1.25\times 10^{-23}\,{\rm Joule}/\,^0{\rm K}\ .
\end{aligned}$$

Il valore accettato oggi è $K_B = 1.38\times 10^{-23}$ Joule/ ^{0}K.

$$\begin{aligned}
N_A &= \frac{R}{K_B} = \frac{8.31\,{\rm Joule}\,/({\rm mole}\cdot\,^0\,{\rm K})}{1.25\times 10^{-23}\,{\rm Joule}/\,^0{\rm K}} = \\
&\approx 6.6\times 10^{23}/{\rm mole}
\end{aligned}$$

2.) Il numero di particelle α diffuse indietro è proporzionale alla sezione d'urto indietro (*normalizzata al flusso incidente $\mathcal{F}_0$ ed al numero di centri diffusori per unità di superficie presenti nella targhetta*), si ha

$$N(back) = \mathcal{F}_0\,\mathcal{N}\,\sigma_{back} = \mathcal{F}_0\,\mathcal{N}\,\pi\left[k_e \frac{Zze^2}{2T_\alpha}\right]^2\ .$$

Il numero di moli per unità di superficie è dato dalla densit'a superficiale diviso il peso atomico, quindi

$$\mathcal{N} = \frac{W}{\mu_A}\cdot N_A\ ,$$

dove N_A è il numero di Avogadro. Avremo perciò

$$\frac{N(back)|_{\rm Cromo}}{N(back)|_{\rm Nichel}} = \frac{\mathcal{N}|_{\rm Cromo}}{\mathcal{N}|_{\rm Nichel}}\cdot\frac{\sigma(back)|_{\rm Cromo}}{\sigma(back)|_{\rm Nichel}} = \frac{\mu_{\rm Nichel}}{\mu_{\rm Cromo}}\cdot\frac{Z^2({\rm Cromo})}{Z^2({\rm Nichel})} = 0.83\ ,$$

ovvero

$$Z({\rm Cromo}) = Z({\rm Nichel})\cdot\sqrt{0.83\cdot\mu_{\rm Cromo}/\mu_{\rm Nichel}} \approx Z({\rm Nichel})\cdot 0.86 = 24.01\ .$$