Integrale della funzione spettrale e costante di Planck

In questa pagina si calcola l'integrale della funzione spettrale come data nell'ipotesi di Planck e si mostra come fu utilizzata da Planck stesso per determinare la costante h.

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty d\nu\, u_\nu(\nu,T) &= \int_0^\infty \frac{8\,\pi}{c^3}\,\nu^2\, K_{\rm B}T\, \frac{\frac{h\nu}{K_{\rm B}T}}{e^{\frac{h\nu}{K_{\rm B}T}}-1} = \\
&= T^4\left[\frac{8\,\pi}{c^3}\,\frac{K_{\rm B}^4}{h^3}\right]\int_0^\infty dx\,\frac{x^3}{e^x-1} = const\;T^4
\end{aligned}
$$

Dove

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty dx\,\frac{x^3}{e^x-1} &= \int_0^\infty dx\,\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\,x^3 = \\
&= \int_0^\infty dx\, e^{-x}\,x^3\,\left[1+e^{-x}+(e^{-x})^2+(e^{-x})^3+...\right] = \\
&= \int_0^\infty dx\,x^3\,e^{-x} + \int_0^\infty dx\,x^3\,e^{-2x} + \int_0^\infty dx\,x^3\,e^{-3x} + ... \\
&= \int_0^\infty dx\,x^3\,e^{-x} + \frac{1}{2^4}\int_0^\infty d(2x)\,(2x)^3\,e^{-2x} + \frac{1}{4^4}\int_0^\infty d(3x)x\,(3x)^3\,e^{-3x} + ... \\
&= \left[1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+...\right]\cdot\int_0^\infty d\xi\,\xi^3\,e^{-\xi} = \\
&= \left[\frac{\pi^4}{90}\right]\cdot 3! = \frac{\pi^4}{15}\;.
\end{aligned}
$$

In conclusione

$$
\int_0^\infty d\nu\,u_\nu(\nu,T) = T^4\left[\frac{8\,\pi}{c^3}\,\frac{K_{\rm B}^4}{h^3}\right]\cdot\frac{\pi^4}{15} = \frac{4}{c}\,\sigma\,T^4\;,
$$

dove $\sigma = 5.67\times 10^{-8}\;\frac{\rm Joule}{m^2\,sec}\,\frac{1}{{}^0K^4}$ è la costante di Stefan. In questa maniera Planck stimò la costante h (oggi $h = 6.63\times 10^{-34}$ Joule $\cdot$ sec) che prese il suo nome: costante di Planck.