

Esempi ed esercizi sul corpo nero

- i) Consideriamo una persona con una temperatura corporea di $37\text{ }^{\circ}\text{C}$ collocata in una stanza a temperatura di $20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Quanto sarà l'energia totale (netta) emessa dalla persona (assumendo che la sua superficie corporea sia di 1.5 m^2 . A quale potenza corrisponde¹?
- ii) La temperatura della pelle è più bassa di quella del corpo. Ripetere il calcolo assumendo come temperatura della pelle $T_p \approx 33\text{ }^{\circ}\text{C}$.
- iii) Gli abiti aiutano. La temperatura esterna dei vestiti è di solito più bassa di $30\text{ }^{\circ}\text{C}$, assumendola $T_A \approx 28\text{ }^{\circ}\text{C}$, ripetere il calcolo della potenza emessa dalla persona.

Se la temperatura esterna diviene maggiore della temperatura corporea il flusso netto di energia si inverte e riscalda il corpo.

- iv) Il corpo inizia a sudare. Perché questo aiuta a regolare la temperatura corporea?
- v) Calcolare la velocità quadratica media delle molecole di acqua ($m_{\text{H}_2\text{O}} = 18\text{ uma}$) per una temperatura della pelle di $33\text{ }^{\circ}\text{C}$ (acqua in equilibrio termico con la pelle²).
- vi) Sapendo che l'energia di legame della molecola d'acqua nel liquido vale circa 0.4 eV , qual'è la velocità minima che la molecola deve avere per evaporare?
- vii) Quanta acqua deve evaporare dalla superficie di un corpo al secondo per mantenere la temperatura della pelle a $33\text{ }^{\circ}\text{C}$ se la temperatura esterna è di $40\text{ }^{\circ}\text{C}$?

¹assumere sempre una radiazione da corpo nero.

²utilizzare la relazione tra energia cinetica e temperatura come derivata nei gas.

soluzioni

- i) Dalla legge di Stefan: l'energia totale emessa per unità di tempo per unità di superficie, $S = \sigma T^4$; consideriamo la radiazione *dal corpo* alla stanza e *dalla stanza* al corpo, il bilancio netto diviene: $\Delta S = \sigma(T_C^4 - T_{\text{ext}}^4)$ (dove $T_C \approx (273 + 37) = 310 \text{ } ^\circ\text{K}$, $T_{\text{ext}} \approx (273 + 20) = 293 \text{ } ^\circ\text{K}$). La potenza emessa netta per tutta la superficie diviene $\Delta P = S \cdot \text{area} = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2/\text{K}^4 \cdot ((310 \text{ } ^\circ\text{K})^4 - (293 \text{ } ^\circ\text{K})^4) \cdot 1.5 \text{ m}^2 = 159 \text{ W}$. L'energia emessa in un giorno: $\Delta E = \Delta P \cdot 24 \times 60 \times 60 \approx 13.7 \times 10^6 \text{ Joule} \approx 3280 \text{ kcal}$.

l'energia totale emessa è di 13.7×10^6 Joule ovvero 3280 kcal, corrispondente ad una potenza di 159 Watt.

- ii) $T_p \approx 33 \text{ } ^\circ\text{C} \approx 306 \text{ } ^\circ\text{K}$; $\Rightarrow \Delta P = \dots \approx 119 \text{ Watt}$.

nel caso di una temperatura della pelle ridotta a $33 \text{ } ^\circ\text{C}$ la potenza è ridotta a 119 Watt.

- iii) $T_A \approx 28 \text{ } ^\circ\text{C} \approx 301 \text{ } ^\circ\text{K}$; $\Rightarrow \Delta P = \dots \approx 71 \text{ Watt}$.

nel caso in cui la persona indossi degli abiti, temperatura esterna degli abiti pari a circa $28 \text{ } ^\circ\text{C}$, la potenza emessa è ridotta a 71 Watt, cioè quella di una lampadina. (Come mai il corpo non risulta luminoso?).

- iv) **Risposta qualitativa e breve: il sudore evapora consumando energia che abbassa la temperatura corporea.**

Risposta più completa: La velocità delle molecole di acqua si distribuisce secondo la distribuzione di Maxwell che ha una lunga coda verso le velocità più elevate (corrispondenti ad energia più alte). Ci saranno sempre molecole vicine alla superficie, che hanno energia sufficiente da superare l'energia di legame e lasciare il liquido. Queste molecole trasportano una grande energia cinetica e lasciano le restanti molecole con un'energia cinetica media più bassa e quindi abbassano la temperatura.

- v) Nel quadro della teoria cinetica dei gas la relazione tra energia cinetica media e temperatura $\langle E \rangle = \langle \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \rangle = \frac{3}{2} K_B T$.

$$\Rightarrow \langle \mathbf{v}^2 \rangle = 3K_B T / m \approx 3 \cdot 1.382 \times 10^{-23} \text{ J/}^0\text{K} \cdot (273+33) \text{ }^0\text{K} / [0.018 \text{ Kg} / 6.022 \times 10^{23}] \approx 424000 \text{ m}^2/\text{sec}^2.$$

$$\Rightarrow \sqrt{\langle \mathbf{v}^2 \rangle} \approx 650 \text{ m/sec.}$$

vi) L'unità di massa atomica corrisponde ad un'energia a riposo 1 uma = $\frac{1}{12} M_{12C} c^2 \approx 931.49 \times 10^6 \text{ eV} = 931.49 \text{ MeV}$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{\min}^2 = 0.4 \text{ eV},$$

$$\Rightarrow |\mathbf{v}_{\min}| = c \sqrt{2 \cdot 0.4 / (m c^2)} \approx c \sqrt{2 \cdot 0.4 \text{ eV} / [18 \cdot 931.49 \times 10^6 \text{ eV}]} \approx 2070 \text{ m/sec.}$$

vii) La potenza irradiata eguaglia la perdita di energia attraverso l'evaporazione; si può assumere che ogni molecola che evapora contribuisca a una diminuzione di energia pari alla differenza tra l'energia di legame e l'energia media delle molecole alla temperatura del corpo: $\langle E \rangle = 3/2 \cdot K_B T_C \approx 3/2 \cdot 1.382 \times 10^{-23} \text{ Joule/}^0\text{K} \cdot 306 \text{ }^0\text{K} \approx 6.34 \times 10^{-21} \text{ Joule} \approx 0.04 \text{ eV}$.

Siano N il numero di molecole che evaporano and M_{tot} la massa totale evaporata, quindi $N = M_{\text{tot}} / m_{\text{H}_2\text{O}}$. L'energia necessaria per l'evaporazione $\Delta E_{\text{tot}} = N(E_{\text{binding}} - \langle E \rangle) = (M_{\text{tot}} / m_{\text{H}_2\text{O}}) (E_{\text{binding}} - \langle E \rangle)$

$$\Rightarrow M_{\text{tot}} = (m_{\text{H}_2\text{O}} \Delta E_{\text{tot}}) / (E_{\text{binding}} - \langle E \rangle)$$

Potenza irradiata dal corpo (si ricorda che $T_{\text{ext}} > T_C$), $\Delta P = \text{area} \cdot \sigma(T_{\text{ext}}^4 - T_C^4)$; bilancio di energia: $\Delta E_{\text{tot}} = \Delta P \Delta t$;

$$\begin{aligned} \Rightarrow M_{\text{tot}} / \Delta t &= m_{\text{H}_2\text{O}} \Delta P / (E_{\text{binding}} - \langle E \rangle) = m_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \text{area} \cdot \sigma(T_{\text{ext}}^4 - T_C^4) / (E_{\text{binding}} - \langle E \rangle) = \\ &\approx 18 \text{ g} / 6.022 \times 10^{23} \cdot 1.5 \text{ m}^2 \cdot 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2/\text{K}^4 \cdot (((273+40) \text{ K})^4 - ((273+33) \text{ K})^4) / (0.4 \text{ eV} \cdot 1.602 \times 10^{-19} \text{ Joule/eV} - 3/2 \cdot 1.382 \times 10^{-23} \text{ Joule/}^0\text{K} \cdot 306 \text{ }^0\text{K}) \approx 3.65 \times 10^{-2} \text{ g/s} \approx 131 \text{ g/h.} \end{aligned}$$

Con le assunzioni fatte il corpo dovrebbe evaporare 131 g di acqua per ora, per mantenere la pelle alla temperatura di 33°C.