Compito scritto di
Calcolo delle probabilità 1^a *UD*

---

1. Date due variabili casuali X e Y indipendenti ed equidistribuite in modo esponenziale di parametro λ, trovare la distribuzione congiunta e le distribuzioni marginali delle variabili casuali $U = X + Y$ e $V = \frac{X}{X+Y}$. Sono U e V indipendenti?

2. Da un'urna contenente palline bianche e nere si estraggono senza reimbussolamento alcune palline. Supponiamo che la probabilità di ottenere esattamente una pallina bianca se si estrae una sola pallina sia uguale alla probabilità se si estraggono due palline ed al doppio della probabilità se si estraggono tre palline. Quante palline bianche e quante nere ci sono nell'urna?

3. Due aeroplani, un quadrimotore e un bimotore, hanno motori dello stesso tipo, che in una tratta possono avere un'avaria, indipendentemente, con probabilità p. Ciascuno dei due aeroplani può continuare il volo se funziona almeno la metà dei suoi motori. Per quali valori di p è più affidabile il quadrimotore?

4. Sia $S_n, n \geq 0$ la passeggiata casuale simmetrica con $S_0 = 0$ e sia $T = \min\{n > 0 : S_n = 0\}$. Mostrare che

$$\mathbb{E}\big(\min\{T, 2m\}\big) = 4m\, \mathbb{P}(S_{2m} = 0)$$

Suggerimento. Mostrare che: i) $2m\, u_{2m} = (2m-1)\, u_{2m-2}$ *e ii)* $u_0 + u_2 + \cdots + u_{2m-2} = 2m\, u_{2m}$ *dove* $u_{2m} = \mathbb{P}(S_{2m} = 0)$.

5. Sia X una variabile casuale con distribuzione binomiale di parametri n e p, calcolare

$$\mathbb{E}\Big(\frac{1}{1+X}\Big).$$

Supponendo che p dipenda da n, cioè $p = p_n$, calcolare il limite di questa espressione per $n \to \infty$ sapendo che $n\, p_n \to \lambda$, con $\lambda > 0$.

Povo, 11 luglio 2005