Compito scritto di
Calcolo delle probabilità 1^a *UD*

---

1. Ci sono 6 urne, numerate, di cui le prime 5 contengono 3 palline bianche e 3 nere, mentre la numero 6 contiene 5 palline bianche e una nera. Si lancia un dado e si estrae una pallina dall'urna con lo stesso numero. Qual è la probabilità di estrarre una pallina bianca? Se la pallina è nera, qual è la probabilità di avere ottenuto 6 con il dado?

La probabilità di estrarre una pallina bianca da una delle prime 5 urne è $\frac{1}{2}$, mentre per l'ultima è $\frac{5}{6}$. Quindi la probabilità di estrarre una pallina bianca è data da

$$5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{9}.$$

Sapendo che la pallina estratta è nera (e la probabilitè di esttrarre una pallina nera è $1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$), la probabilità condizionata di averla estratta dall'ultima urna è

$$\frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{16}$$

2.Trovare la distribuzione della variabile casuale

$$Z = \frac{\max\{X, Y\}}{\min\{X, Y\}}$$

se X ed Y sono indipendenti e distribuiti in modo esponenziale di parametro λ. Descrivere come la distribuzione trovata dipende dal parametro λ.

Osserviamo che $Z \geq 1$. Quindi, per $t \geq 1$ calcoliamo $\mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}(Z \leq t, X < Y) + \mathbb{P}(Z \leq t, X \geq Y)$. Evidentemente si ha

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}(\tfrac{1}{t} X \leq Y \leq t\, X)$$

e quindi

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \Big(\int_{x/t}^{tx} \lambda e^{-\lambda y}\, dy \Big)\, dx = \frac{t-1}{t+1}$$

La distribuzione di Z non dipende da λ!.

3.Si lancia a caso una moneta di raggio $a < 1/2$ su un piano su cui è tracciato un quadrato di lato lungo 1. Si trovi la distribuzione di probabilità della distanza del centro della moneta dai lati del quadrato, ammesso che la moneta cada interamente dentro il quadrato. Calcolare il valor medio di questa distanza, descrivendo la sua dipendenza dal raggio a.
Il centro della moneta può cadere solo nel quadrato concentrico a quello dato ma di lato $1-2a$. La distanza Z del centro della moneta dai lati del quadrato di lato 1 può evidentemente variare

tra a e $\frac{1}{2}$. Quindi, supponendo che la distribuzione di probabilità del centro sia uniforme (nel quadrato interno di lato $1-2a$), abbiamo che

$$\mathbb{P}(Z \le z) = \frac{(1-2a)^2 - (1-2z)^2}{(1-2a)^2}$$

in quanto il centro deve cadere nella "cornice" formata dal quadrato di lato $1-2a$, a cui è stato tolto il quadrato concentrico di lato $1-2z$. Questa distribuzione ammette densità $f(z)$ data da

$$f(z) = \frac{4(1-2z)}{(1-2a)^2}$$

Il valor medio è dato da

$$\int_a^{1/2} z f(z)\, dz = \frac{1+4a}{6}$$

abbiamo in altre parole una dipendenza lineare da a. Osserviamo che abbiamo sfruttato la scomposizione

$$\frac{1}{6} - 2a^2 + \frac{8}{3}a^3 = \frac{1}{6}(1-2a)^2(1+4a).$$

4. Si ripete n volte in maniera indipendente un esperimento che può dare esiti 0,1 o 2 con probabilità rispettivamente p_0, p_1 e p_2 ($p_0 + p_1 + p_2 = 1$). Calcolare la probabilità che vi sia almeno un 1 e almeno un 2 nella serie di n ripetizioni.

Denotiamo con $A_1 = \{$vi sia almeno un 1 nella serie di n ripetizioni$\}$ e $A_2 = \{$vi sia almeno un 2 nella serie di n ripetizioni$\}$. Si richiede di calcolare

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A_1} \cup \overline{A_2}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A_1}) - \mathbb{P}(\overline{A_2}) + \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}).$$

Ora si ha

$$\mathbb{P}(\overline{A_1}) = (1-p_1)^n \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(\overline{A_2}) = (1-p_2)^n$$

e d'altra parte $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = A_0 = \{$esce sempre 0 nella serie di n ripetizioni$\}$, e quindi $\mathbb{P}(A_0) = p_0^n$. Si conclude che la probabilità richiesta è data da

$$1 - (1-p_1)^n - (1-p_2)^n + p_0^n.$$

nelle varie versioni equivalenti tenendo conto di $p_0 + p_1 + p_2 = 1$.

5. Andrea a Bruno sono due cacciatori con diversa abilità: Andrea centra la preda con probabilità p_A, mentre Bruno la colpisce con probabilità p_B. Si alternano a sparare fino a colpire la preda; se inizia Andrea, con quale probabilità sarà egli stesso a centrare il bersaglio? Sapendo che è Andrea a colpire la preda, qual è il suo numero medio di cartucce sparate?

1. $\mathbb{P}(A \textit{ centri la preda}) = p_A + (1-p_A)(1-p_B)p_A + (1-p_A)^2(1-p_B)^2 p_A + (1-p_A)^3(1-p_B)^3 p_A + (1-p_A)^4(1-p_B)^4 p_A + \ldots = p_A\{1 + (1-p_A)(1-p_B) + ((1-p_A)(1-p_B))^2 + ((1-p_A)(1-p_B))^3 + \ldots\}$. Sommando la serie geometrica otteniamo

$$\mathbb{P}(A \textit{ centri la preda}) = \frac{p_A}{1-(1-p_A)(1-p_B)} = \frac{p_A}{p_A + p_B - p_A p_B}$$

2. Sapendo che A centra la preda, la probabilità condizionata che il colpo vada a segno al k-esimo sparo (di A) è data da

$$q_k = \frac{(1-p_A)^{k-1}(1-p_B)^{k-1}p_A}{\frac{p_A}{p_A+p_B-p_A\,p_B}} = (p_A+p_B-p_A\,p_B)(1-p_A)^{k-1}(1-p_B)^{k-1}$$

ed il corrispondente valore di aspettazione richiesto è

$$m = \sum_{k=1}^{\infty} k\,q_k = (p_A+p_B-p_A\,p_B)\sum_{k=1}^{\infty} k\,(1-p_A)^{k-1}(1-p_B)^{k-1}.$$

Ricordando che $\sum_{k=1}^{\infty} k\,\lambda^{k-1} = \frac{1}{(1-\lambda)^2}$, otteniamo infine

$$m = \frac{1}{p_A+p_B-p_A\,p_B}.$$

$\boxed{\textit{Povo}, \text{28 agosto 2006}}$