Compito scritto di

Calcolo delle probabilità 1^a *UD*

---

1. Un'urna contiene 2 palline bianche e 2 palline nere. Si estrae a caso una pallina e la si sostituisce con una pallina bianca; sull'urna così ottenuta si ripete l'operazione. Dopo la seconda operazione, qual è la probabilità di estrarre una pallina bianca?

Alla fine della seconda operazione, si possono ottenere tre tipi di urne:
un'urna contenente {2b, 2n} con probabilità $\frac{1}{4}$,
un'urna contenente {3b, 1n} con probabilità $\frac{5}{8}$,
un'urna contenente {4b, 0n} con probabilità $\frac{1}{8}$
e quindi la probabilità di estrarre dopo la seconda operazione una pallina bianca è data da

$$\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\,\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\,1=\frac{23}{32}$$

2. Un'urna contiene lo stesso numero m di palline rosse, nere e verdi. Si estraggono tre palline: indichiamo rispettivamente con N, V e R il numero di palline nere, verdi e rosse, estratte.

1. Determinare la legge di probabilità di N [e la sua media].
2. Determinare la probabilità che $N > V$.

[3. Determinare la media di N condizionata a $N + V = 3$.]

Scegliete il tipo di estrazioni: estrazioni senza reimmissione oppure con reimmissione.

Scegliamo l'estrazione con reimmissione. Tutte e tre le variabili casuali $N.V, R$ sono equidistribuite con $N \in \{0,1,2,3\}$ e $\mathbb{P}(N=k)=\binom{3}{k}\frac{1}{3^k}(\frac{2}{3})^{3-k}$ con media $3\frac{1}{3}=1$. Ma le 3 variabili non sono indipendenti; abbiamo per la simmetria che $\mathbb{P}(N>V)=\mathbb{P}(V>N)$ e d'altra parte sono uguali solo per i valori $(0,0)$ e $(1,1)$; quindi calcoliamo $\mathbb{P}(N=0,V=0)=\mathbb{P}(R=3)=\frac{1}{27}$ e $\mathbb{P}(N=1,V=1)=\mathbb{P}(N=1,V=1,R=1)=3!\,\frac{1}{27}=\frac{2}{9}$, da cui

$$\mathbb{P}(N>V)=\frac{1-\mathbb{P}(N=V)}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\frac{1}{27}+\frac{2}{9})=\frac{10}{27}$$

3. Dato il triangolo T di vertici $(0,0)$, $(1,1)$ e $(1,0)$, considerate la funzione $f(x,y)$ così definita:

$$f(x,y)=\alpha,\quad (x,y)\in T,\qquad f(x,y)=0,\quad \text{altrimenti.}$$

Determinare α in modo che $f(x,y)$ sia una densità di probabilità. Indicando con (X,Y) una variabile aleatoria avente $f(x,y)$ come densità, determinare le leggi marginali, la media [e la varianza] di X e Y. Le due variabili sono indipendenti?

È evidente che bisogna scegliere $\alpha = 2$. Per le marginali abbiamo

$$f_1(x)=\int_0^1 f(x,y)\,dy=\int_0^x 2\,dy=2x$$

Analogamente per $f_2(y)=2(1-y)$. Le variabili quindi non sono indipendenti, ed un semplice calcolo fornisce $\mathbb{E}(X)=2/3$, $\mathbb{E}(Y)=1/3$ e $V(X)=V(Y)=1/18$.

4. Siano X, Y due estrazioni "a caso" (con reinmbussolamento) dall'insieme $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$. Denotiamo con p_N la probabilità dell'evento $\{X^2 \le N Y\}$. Trovare il limite di p_N per $N \to \infty$. $\big[$*Nota: non si richiede di calcolare esplicitamente* $p_N\big]$

È utile introdurre le variabili casuali $X' = \frac{X}{N}$ e $Y' = \frac{Y}{N}$. È anche chiaro che $0 < X' \le 1$ e $0 < Y' \le 1$. Inoltre al variare di N i punti (X', Y') "riempiono" sempre più (ed in maniera uniforme) il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ (provate a disegnare ciò). D'altra parte $\mathbb{P}(X^2 \le N Y) = \mathbb{P}(X'^2 \le Y')$; quindi al limite per $N \to \infty$ abbiamo che p_N tende all'area dell'intersezione del quadrato con la regione sopra la parabola $y = x^2$. Un semplice calcolo fornisce $p_N \to \frac{2}{3}$.

5. Ad una stazione di servizio con una sola pompa di benzina, il tempo di rifornimento di ogni cliente è aleatorio con distribuzione esponenziale di media 3 minuti. Supponiamo che ad un certo istante (tempo 0) arrivi un cliente ed inizi il suo rifornimento, e che esattamente dopo 3 minuti arrivi un secondo cliente. Determinare la legge di probabilità del tempo aleatorio T, in cui il secondo cliente termina il rifornimento e calcolarne la media.

Una variabile casuale X distribuita esponenzialmente è una variabile casuale che assume solo valori positivi e

$$\mathbb{P}(X \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

per $t > 0$, altrimenti è zero. La media di X è $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$. Se prendo $\frac{1}{\lambda} = 3$ (minuti) significa che "misuro" t in minuti e $\lambda = 1/3$. Se però misuro t in ore, allora $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$ ore, in tal caso $\lambda = 20$. In altre parole, il valore di λ dipende da come misuro il tempo.
Siano T_1 il tempo aleatorio di rifornimento del primo cliente e T_2 il tempo di rifornimento del secondo cliente. Qui supporremo che i due tempi siano equidistribuiti (in modo esponenziale) ed indipendenti. Il tempo di attesa del primo cliente coincide con T_1, ma il tempo di attesa T del secondo cliente dipende se, quando arriva (diciamo al tempo $t_0 = 3$ minuti), il primo ha terminato oppure no. Quindi, abbiamo sempre

$$\mathbb{P}(T \le t) = \mathbb{P}(T \le t, T_1 \le t_0) + \mathbb{P}(T \le t, T_1 > t_0),$$

dove abbiamo $\mathbb{P}(T \le t, T_1 \le t_0) = \mathbb{P}(T_2 \le t)\mathbb{P}(T_1 \le t_0)$, perché il secondo cliente arriva dopo che il primo si è servito; mentre $\mathbb{P}(T \le t, T_1 > t_0) = \mathbb{P}(T_2 + T_1 - t_0 \le t, T_1 > t_0)$, che si può calcolare con

$$\mathbb{P}(T_2 + T_1 - t_0 \le t, T_1 > t_0) = \int_{t_0}^{t_0+t} \mathbb{P}(T_2 \le t + t_0 - s)\, \mathbb{P}(T_1 \in ds) = \int_{t_0}^{t_0+t} \big(1 - e^{-\lambda(t+t_0-s)}\big)\lambda e^{-\lambda s}\, ds$$

da cui

$$\mathbb{P}(T \le t) = (1 - e^{-\lambda t})(1 - e^{-\lambda t_0}) + e^{-\lambda t_0}(1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}) = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda\, t\, e^{-\lambda(t+t_0)}$$

e quindi

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda}(1 + e^{-\lambda t_0}).$$

Povo, 5 giugno 2006