Compito scritto di
Calcolo delle probabilità 1^a *UD*

---

1. In una successione di prove, dove ogni prova consiste che il giocatore A lanci 3 dadi ed il giocatore B ne lanci due, il gioco si ferma non appena uno dei giocatori ottiene un 6 su almeno un dado. Trovare la probabilità dei seguenti eventi:
1. il gioco si ferma a causa di A e non di B.
2. il gioco si ferma a causa di B e non di A.
3. il gioco si ferma a causa sia di A che di B.

Calcoliamo la probabilità p_A che A ottenga un 6 su almeno un dado.
Calcoliamo la probabilità che A non ottenga alcun 6: è evidentemente $(5/6)^3$ e quindi $p_A = 1 - (5/6)^3$.
Analogamente per p_B. Si ottiene $p_B = 1 - (5/6)^2$.
1. $\mathbb{P}(\textit{il gioco si ferma a causa di } A \textit{ e non di } B) = (1-p_B)p_A + (1-p_B)^2(1-p_A)p_A + (1-p_B)^3(1-p_A)^2p_A + (1-p_B)^4(1-p_A)^3p_A + \ldots = (1-p_B)p_A\{1 + (1-p_A)(1-p_B) + ((1-p_A)(1-p_B))^2 + ((1-p_A)(1-p_B))^3 + \ldots\}$. Sommando la serie geometrica otteniamo

$$\mathbb{P}(\textit{il gioco si ferma a causa di } A \textit{ e non di } B) = \frac{(1-p_B)p_A}{1-(1-p_A)(1-p_B)} = \frac{(1-p_B)p_A}{p_A + p_B - p_A p_B}$$

2. Analogamente

$$\mathbb{P}(\textit{il gioco si ferma a causa di } B \textit{ e non di } A) = \frac{(1-p_A)p_B}{p_A + p_B - p_A p_B}$$

e 3.

$$\mathbb{P}(\textit{il gioco si ferma a causa sia di } A \textit{ che di } B) = 1 - \frac{(1-p_B)p_A + (1-p_A)p_B}{p_A + p_B - p_A p_B} = \frac{p_A p_B}{p_A + p_B - p_A p_B}$$

(Esplicitamente $p_A = \frac{91}{216}$, $p_B = \frac{11}{36}$. Inoltre per 1. abbiamo $\frac{2275}{4651} \approx 0.489142$; per 2. abbiamo $\frac{1375}{4651} \approx 0.295635$ e per 3. abbiamo $\frac{1001}{4651} \approx 0.215223$).

2. Siano scelti, in modo indipendente, n punti, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, "a caso" (uniformemente) su una circonferenza C di centro O. Trovare la probabilità che il poligono convesso, con vertici negli n punti, contenga al suo interno il punto O. (È sufficiente rispondere per $n = 3$ ed eventualmente generalizzare).
Anche in questo caso è conveniente considerare l'evento complementare F^c: *il centro O non sta all'interno del convesso*: osserviamo che possiamo considerare

$$F^c = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \cdots \cup G_n$$

dove G_k è l'evento: *rispetto al punto A_k tutti gli altri $n-1$ punti sono a sinistra del diametro che passa per A_k (stando in A_k)*. Ebbene è facile controllare che tutti i G_k sono incompatibili (disgiunti). Inoltre è evidente che $\mathbb{P}(G_k) = (1/2)^{n-1}$. Quindi la risposta è

$$\mathbb{P}(F) = 1 - \frac{n}{2^{n-1}}$$

3. Mostrare che la somma $X+Y$ di due variabili casuali indipendenti X e Y, distribuite con distribuzione di Poisson di parametro rispettivamente λ_1 e λ_2, è ancora distribuita come una Poisson di parametro $\lambda_1+\lambda_2$.
È evidente che i valori che la somma può assumere sono i valori interi $k = 0, 1, 2, \ldots$. Quindi

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \mathbb{P}(X+Y=k, X \le k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X+Y=k, X=i).$$

Ora ogni $\mathbb{P}(X+Y=k, X=i) = \mathbb{P}(Y=k-i, X=i) = \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i)$; e quindi

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}.$$

Se ne abbiamo N, $X_1, X_2, \ldots, X_N$, indipendenti e distribuite come Poisson di parametro rispettivamente $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$, trovare, al variare di n ed m
1. $\mathbb{P}(X_1+X_2+\cdots+X_k = m \,|\, X_1+X_2+\cdots+X_N = n)$,
Osserviamo che per $m > n$ risulta evidentemente $\mathbb{P}(X_1+X_2+\cdots+X_k = m \,|\, X_1+X_2+\cdots+X_N = n) = 0$. Per $m \le n$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1+X_2+,\cdots+X_k = m \,|\, X_1+X_2+\cdots+X_N = n) &= \\
= \frac{\mathbb{P}[(X_1+X_2+\cdots+X_k = m) \cap (X_1+X_2+\cdots+X_N = n)]}{\mathbb{P}(X_1+X_2+\cdots+X_N = n)} &= \\
= \frac{\mathbb{P}(X_1+X_2+\cdots+X_k = m)\mathbb{P}(X_{k+1}+X_{k+2}+,\cdots+X_N = n-m)]}{\mathbb{P}(X_1+X_2+,\cdots+X_N = n)} &= \\
= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k)^m}{m!}e^{-(\lambda_{k+1}+\lambda_{k+2}+\cdots+\lambda_N)}\frac{(\lambda_{k+1}+\lambda_{k+2}+\cdots+\lambda_N)^{n-m}}{(n-m)!}}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_N)^n}{n!}} &= \\
= \binom{n}{m}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_N}\right)^m\left(1-\frac{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_N}\right)^{n-m}
\end{aligned}$$

Quindi otteniamo una distribuzione binomiale.
2. $\mathbb{E}(X_1+X_2+\cdots+X_k \,|\, X_1+X_2+,\cdots+X_N = n)$.
Visto il risultato precedente, è immediato scrivere che

$$\mathbb{E}(X_1+X_2+\cdots+X_k \,|\, X_1+X_2+,\cdots+X_N = n) = n\frac{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_N}$$

Ricordando che la media di una binomiale di parametri n ep è data da np.

4. Definiamo $f(x) = \alpha\sqrt{1-x}$ per $0 < x < 1$ ed $f(x) = 0$ altrimenti ($x \notin (0,1)$). Determinare α in modo che la corrispondente $f(x)$ sia una densità di probabilità. Sia X una variablile aleatoria con la densità di probabilità $f(x)$, calcolare la sua media (e varianza). Infine calcolare $\mathbb{P}(X > t \,|\, X > t/2)$ per $t \in (0,1)$.
Tramite una semplice integrazione otteniamo $\alpha = \frac{3}{2}$, la media $= \frac{2}{5}$ e la varianza $= \frac{12}{175}$.
Infine

$$\mathbb{P}(X > t \,|\, X > t/2) = \frac{\mathbb{P}(X > t)}{\mathbb{P}(X > t/2)} = \frac{\int_t^1 \sqrt{1-x}\,dx}{\int_{t/2}^1 \sqrt{1-x}\,dx} = \left(\frac{1-t}{1-t/2}\right)^{3/2}$$

5. Il punto (X_1, X_2) è scelto in modo uniforme nel quadrato $[0,1] \times [0,1]$. Per quali valori di r i due eventi

$$A_r = \{|X_1 - X_2| > r\} \qquad \text{e} \qquad B_r = \{X_1 + X_2 \leq 3r\}$$

sono indipendenti?
Con un semplice disegno ci si accorge che bisogna distinguere i valori $0 \leq r \leq 1/3$, $1/3 < r \leq 1/2$, $1/2 < r < 2/3$ e $r \geq 2/3$.
Per il primo caso si ha $\mathbb{P}(A_r) = (1-r)^2$, $\mathbb{P}(B_r) = 9/2\, r^2$ e $\mathbb{P}(A_r \cap B_r) = 2r^2$: l'indipendenza si ottiene per $r = 1/3$ e $r = 0$ in quanto A_r ha misura zero.
Nel secondo caso si ha $\mathbb{P}(A_r) = (1-r)^2$, $\mathbb{P}(B_r) = 1 - (2-3r)^2/2$ e $\mathbb{P}(A_r \cap B_r) = (1-r)^2 - 2(1-2r)^2$: per l'indipendenza si ottiene l'equazione

$$9r^3 - 30r^2 + 21r - 4 = 0$$

che ha 1/3 come radice e quindi si fattorizza come

$$(3\,r - 1)\,\left(3r^2 - 9r + 4\right)$$

e le altre due radici sono più grandi di 1/2 e quindi sono da scartare.
Per $1/2 < r < 2/3$ si ha $A_r \cap B_r = A_r$ e $\mathbb{P}(B_r) < 1$ e quindi non si può avere indipendenza.
Infine per $r \geq 2/3$ si ha che $\mathbb{P}(B_r) = 1$ e quindi l'indipendenza. In conclusione si ha indipendenza per $r = 0$, $r = 1/3$ e per $r \geq 2/3$.

Povo, 5 luglio 2006