Sia V_t un processo a variazione totale limitata e M_t una martingala, entrambi i processi adattati alla filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}$. Il processo

$$Z_t = Z_0 + V_t + M_t$$

si dice *semimartingala* e V_t e M_t sono univocamente determinati. (Supporremo senza perdere in generalità che $V_0 = M_0 = 0$). Possiamo definire anche per le semimartingale la variazione quadratica e risulta

$$\sum_{i=0}^{n-1} (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})^2 \underset{\mathbb{P}}{\to} \langle M \rangle_t$$

quando la partizione $\pi = \{t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = t\}$ tende all'infinito; in altre parole la variazione quadratica di Z coincide con la variazione quadratica della sua componente martingala M: il processo a variazione totale limitata V non dà nessun contributo!

Definiamo

$$\int_0^t X_r \, dZ_r = \int_0^t X_r \, dV_r + \int_0^t X_r \, dM_r$$

dove al secondo membro il primo integrale è un "normale" integrale di Stieltjes ed il secondo è un integrale stocastico rispetto ad una martingala.

Calcoliamo

$$\int_0^t Z_r \, dZ_r$$

come limite (in probabilità) delle somme

$$\sum_{i=0}^{n-1} Z_{r_i} \left(Z_{r_{i+1}} - Z_{r_i} \right) = \frac{1}{2}(Z_t^2 - Z_0^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (Z_{r_{i+1}} - Z_{r_i})^2$$

da cui

$$\int_0^t Z_r \, dZ_r = \tfrac{1}{2}(Z_t^2 - Z_0^2) - \tfrac{1}{2} A_t$$

che possiamo riscrivere

$$Z_t^2 = Z_0^2 + 2 \int_0^t Z_r \, dZ_r + A_t = Z_0^2 + 2 \int_0^t Z_r \, dV_r + A_t + 2 \int_0^t Z_r \, dM_r$$

Esempio

$$Z(t) = Z(0) + \int_0^t F(r) \, dr + \int_0^t G(r) \, dW_r$$

$$Z(t)^2 = Z(0)^2 + 2\int_0^t Z(r)\,F(r)\,dr + \int_0^t G(r)^2\,dr + 2\int_0^t Z(r)\,G(r)\,dW_r$$

Usando l'identità $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4\,a\,b$ (spesso chiamata identità di polarizzazione) si può dimostrare che dati due processi di Itô

$$Z_1(t) = Z_1(0) + \int_0^t F_1(r)\,dr + \int_0^t G_1(r)\,dW_r$$

$$Z_2(t) = Z_2(0) + \int_0^t F_2(r)\,dr + \int_0^t G_2(r)\,dW_r$$

allora si ha

$$\begin{aligned} Z_1(t)\,Z_2(t) = Z_1(0)\,Z_2(0) + \int_0^t (Z_1(r)\,F_2(r) + Z_2(r)\,F_1(r))\,dr + \int_0^t G_1(r)\,G_2(r)\,dr \\ + \int_0^t (Z_1(r)\,G_2(r) + Z_2(r)\,G_1(r))\,dW_r \end{aligned}$$

Cioè la Proposizione 7.3 del Baldi.