

1. (6 punti) Determinare l'insieme dei valori $x \in \mathbf{R}$ per cui la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+2} (x^2 - x - 1)^n$$

è convergente.

1. (6 punti) Determinare l'insieme dei valori $x \in \mathbf{R}$ per cui la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - 2}{n^3 + 1} (x^2 + x - 1)^n$$

è convergente.

2. (6 punti) Determinare la lunghezza del grafico

$$G = \{(x, y) \mid y = 1 - x^2, x \in [0, 1]\}.$$

2. (6 punti) Determinare la lunghezza del grafico

$$G = \{(x, y) \mid y = 1 + x^2, x \in [0, 1]\}.$$

3. (6 punti) (i) Per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - 2y^2 = 1 \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

(ii) Determinare per quale valore $\alpha \in \mathbf{R}$ si ha $y(1) = 0$.

(iii) Dimostrare che $y(x)$ è strettamente crescente.

3. (6 punti) (i) Per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - 4y^2 = 2 \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

(ii) Determinare per quale valore $\alpha \in \mathbf{R}$ si ha $y(\frac{1}{2}) = 0$.

(iii) Dimostrare che $y(x)$ è strettamente crescente.