

Diario del corso di Analisi Matematica 1
(a.a. 2019/20)

- 16 settembre 2019 (2 ore)
[Presentazione dei corsi di laurea da parte del Direttore di Dipartimento.]
- 17 settembre 2019 (1 ora)
Presentazione del corso.
- 18 settembre 2019 (2 ore)
Numeri naturali, interi, razionali, reali. $\sqrt{2}$ non razionale. Come si risolve $x^2 + 1 = 0$? Funzioni di variabile reale a valori reali. Potenze ad esponente intero positivo, polinomi. L'approssimazione polinomiale è efficace. Funzioni razionali. Funzioni pari/dispari.
- 19 settembre 2019 (2 ore)
Radice k -esima, potenze (con base positiva) ad esponente razionale positivo. $x^0 = 1$. Potenze (con base positiva) ad esponente razionale di segno qualsiasi. Potenze (con base positiva) ad esponente reale, esponenziali. Funzioni crescenti/decrescenti (monotone).
- 20 settembre 2019 (2 ore)
Funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente). Funzione distanza dall'origine (modulo, valore assoluto). Funzioni periodiche, funzioni limitate. Composizione di funzioni. Funzione inversa.
[23 settembre 2019, a esercitazione (2 ore): Funzione inversa. Funzioni elementari inverse: radici, logaritmi, arcoseno, arcocoseno, arcotangente. Funzioni iniettive, surgettive, bigettive (biunivoche).]
- 24 settembre 2019 (2 ore)
Numeri complessi: forma algebrica. Rappresentazione nel piano. Somma, prodotto, rapporto. Parte reale e parte immaginaria, coniugato, modulo. Forma trigonometrica di un numero complesso. Prodotto e potenze in forma trigonometrica.
- 25 settembre 2019 (2 ore)
Come i logaritmi servono a fare calcoli (regolo calcolatore). Formula di Eulero: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Forma esponenziale di un numero complesso. Potenze e radici k -esime. Esempi ed esercizi tipici sui numeri complessi.
- 26 settembre 2019 (2 ore)
Esempi ed esercizi tipici sui numeri complessi. Limiti: motivazioni del concetto. Definizione formale.
- 27 settembre 2019 (2 ore)
Ricevimento collettivo in aula.
- 1 ottobre 2019 (2 ore)
Proprietà dei limiti (prodotto per costanti, somma, prodotto, reciproco, rapporto). Estensione dell'algebra dei limiti ai casi non coperti dalla teoria standard (cioè per funzioni che tendono all'infinito). Forme indeterminate: $+\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$. Limiti: eventuale non esistenza, unicità.

- 2 ottobre 2019 (2 ore)
Massimo e minimo di un insieme. Maggioranti e minoranti di un insieme. Il minimo dei maggioranti esiste sempre: estremo superiore. Il massimo dei minoranti esiste sempre: estremo inferiore. Successioni: definizione. Massimo e minimo, maggioranti e minoranti, estremo superiore e estremo inferiore di una funzione o di una successione. Successioni e funzioni limitate, limitate superiormente, limitate inferiormente. Le successioni monotone o convergono o divergono.
- 3 ottobre 2019 (2 ore)
Il numero $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Determinazione della base di esponenziale per cui la retta tangente in 0 ha pendenza 1. Limite per $x \rightarrow 0$ di $\frac{e^x - 1}{x}$, $\frac{\log(1+x)}{x}$ (e analoghi risultati in base A). Teorema di compressione (o “dei due carabinieri”). Limite per $x \rightarrow 0$ di $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{1 - \cos x}{x^2}$, $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$, $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$, $\frac{\operatorname{arcsin} x}{x}$.
- 4 ottobre 2019 (1 ora)
Gerarchia di infiniti. Gerarchia di infinitesimi. Esempi ed esercizi.
- 8 ottobre 2019 (2 ore)
Funzione (successione) limitata per funzione (successione) infinitesima è infinitesima. Funzione (successione) convergente è localmente limitata (globalmente limitata). Teoremi della permanenza del segno. Funzioni continue: definizione. Esempi di discontinuità: salto, eliminabile, oscillazioni non smorzate “impacchettate” in un intervallo di lunghezza arbitrariamente piccola. Proprietà delle funzioni continue: somma, prodotto per costanti, prodotto, rapporto, composizione.
- 9 ottobre 2019 (2 ore)
Inversa di funzione continua su un intervallo è continua. Teorema di esistenza degli zeri: metodo di bisezione. Stima dell’errore di approssimazione nel metodo di bisezione. Teorema dei valori intermedi. Teorema di Weierstrass: enunciato, osservazioni sulle ipotesi.
- 10 ottobre 2019 (2 ore)
Teorema di Weierstrass: dimostrazione. Teorema di Bolzano-Weierstrass. Varianti del teorema di Weierstrass. Esercizi sul teorema di esistenza degli zeri. Derivata e derivabilità: definizione.
- 11 ottobre 2019 (1 ora)
Retta tangente come limite di rette secanti. Retta tangente come retta di migliore approssimazione. Differenziabilità: definizione. Derivabilità e differenziabilità sono equivalenti. La derivabilità implica la continuità.
- 15 ottobre 2019 (2 ore)
Regole di derivazione: somma, prodotto per costanti, prodotto, reciproco, rapporto. Derivata di funzione composta. Derivata della funzione inversa. Derivata di x^k ($k \geq 0$); e^x ; A^x ; $\sin x$; $\cos x$.
- 16 ottobre 2019 (2 ore)
Derivata di $\operatorname{tg} x$; x^r ($r \in \mathbf{R}, x > 0$); $\log x$; $\operatorname{arcsin} x$; $\operatorname{arccos} x$; $\operatorname{arctg} x$. Funzioni iperboliche: $\sinh x$, $\cosh x$. Metodo di Newton. Metodo di Erone.

- 17 ottobre 2019 (2 ore)
Massimi e minimi assoluti e relativi (locali): generalità. Teorema di Fermat. Massimi e minimi in un intervallo chiuso e limitato. Esempi ed esercizi su massimi e minimi in un intervallo chiuso e limitato. Se f è derivabile e crescente, allora $f' \geq 0$. Teorema di Lagrange. Teoremi di Rolle e di Cauchy. Esempi.
- 18 ottobre 2019 (1 ora)
Se f è definita in un intervallo ed è derivabile con $f' \geq 0$ (rispettivamente, $f' > 0$), allora f è crescente (rispettivamente, strettamente crescente). Se f è definita in un intervallo ed è derivabile con $f' = 0$, allora f è costante. Regola di de l'Hôpital. Esempi ed esercizi.
- 22 ottobre 2019 (2 ore)
Regola di de l'Hôpital: cenni alla dimostrazione. Derivabilità come limite di derivate. Esempi ed esercizi. Asintoti obliqui: definizione ed esempi.
- 23 ottobre 2019 (2 ore)
Asintoti obliqui: esercizi. Convessità e concavità: definizione. Caratterizzazione tramite il segno di f'' . Convessità e retta tangente. Punti di flesso. Azzeramento di f'' nei punti di flesso. Esempi. Segno di f'' e punti di massimo e minimo relativo.
- 25 ottobre 2019 (2 ore)
Studio di grafici. Esempi ed esercizi di ricapitolazione sulla prima parte del programma.
- 5 novembre 2019 (2 ore)
Approssimazione polinomiale: derivazione del polinomio approssimante, polinomio di Taylor di grado N e formula di approssimazione di Taylor (con resto in forma di Peano). Formula di Taylor con resto di Lagrange.
- 6 novembre 2019 (2 ore)
Sviluppo di $\sin x$, $\cos x$, e^x , $\log(1+x)$, $\tan x$. Esempi ed esercizi sui limiti con la formula di Taylor. Sviluppo di $\frac{1}{1-x}$; cenni allo sviluppo di $\frac{1}{1+x^2}$, $\arctg x$.
- 7 novembre 2019 (2 ore)
Infinitesimi di ordine superiore $o(x^k)$ e loro proprietà. Ulteriori esempi ed esercizi sui limiti con la formula di Taylor. Polinomio di Taylor come unico polinomio che coincide con la funzione fino alla derivata N -esima.
- 8 novembre 2019 (1 ora)
Controllo dell'errore in funzione di N . Sviluppo in grande di e^x ; $\sin x$; $\cos x$; $\log(1+x)$ (per $-1 < x \leq 1$). Calcolo approssimato di $\cos \frac{1}{2}$.
- 12 novembre 2019 (2 ore)
Serie numeriche: introduzione. Achille e la tartaruga. Serie numeriche: definizione di convergenza, divergenza, indeterminazione. Condizione necessaria per la convergenza. Serie geometriche. Serie telescopiche. Serie di Mengoli. Le serie a termini positivi o convergono o divergono positivamente.
- 13 novembre 2019 (2 ore)
Criterio di confronto. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente. Criterio di confronto asintotico. Criteri del rapporto e della radice. Esempi ed esercizi.

- 14 novembre 2019 (2 ore)

Criterio di convergenza assoluta. Criterio di Leibniz. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente.

Serie armoniche generalizzate $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$: convergenza per $\alpha > 1$. I numeri periodici come numeri razionali. Esempi ed esercizi. Serie di potenze e serie di Taylor. Raggio di convergenza di una serie di potenze e suo calcolo.

- 15 novembre 2019 (1 ora)

Serie di Taylor di e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$ (per $-1 < x \leq 1$). Derivazione ed antiderivazione termine a termine.

- 19 novembre 2019 (2 ore)

Esempio di funzione C^{∞} che non coincide con la sua serie di Taylor. Esercizi su derivazione ed antiderivazione termine a termine per serie di potenze. La serie binomiale. La funzione di Weierstrass, continua e mai derivabile: definizione e osservazioni.

- 20 novembre 2019 (2 ore)

Serie di potenze in campo complesso. Serie di Taylor: rivisitazione per e^z , $\sin z$, $\cos z$. Formula di Eulero. La funzione ζ di Riemann: cenni sul problema. Integrali: definizione come limite di somme di Cauchy–Riemann (limite di somme di aree di rettangoli approssimanti). Le funzioni continue sono integrabili. Le funzioni monotone sono integrabili. Esempio di funzione non integrabile (funzione di Dirichlet).

- 21 novembre 2019 (2 ore)

Calcolo dell'integrale di x e di x^2 con le somme di Cauchy–Riemann (esempio di Gauss). Proprietà dell'integrale: linearità, positività, monotonia, additività. Versione intuitiva del teorema fondamentale del calcolo.

- 22 novembre 2019 (2 ore)

Teorema della media integrale. Teorema fondamentale del calcolo. Esempi ed esercizi di integrazione diretta. Integrazione per parti: formula, esempi ed esercizi. Integrazione per cambiamento di variabile: formula.

- 26 novembre 2019 (2 ore)

Integrazione per cambiamento di variabile: approfondimenti e modalità operativa. Esempi ed esercizi. Integrale di $\sqrt{a^2 - x^2}$: area del cerchio. Integrale di $\sqrt{a^2 + x^2}$ e di $\sqrt{x^2 - a^2}$. Integrali razionali con denominatore di secondo grado: presentazione dell'argomento. Divisione di polinomi.

- 27 novembre 2019 (2 ore)

Integrali razionali con denominatore di secondo grado: procedimento. Volume di solidi di rotazione, rispetto ad ambedue gli assi. Volume della sfera. Principio di Cavalieri.

- 28 novembre 2019 (2 ore)

Volume della piramide. Volume del cono circolare retto. Volume di un cono generico. Volume del toro. Cenni al teorema di Pappo. Lunghezza di grafici, aree di superfici di rotazione. Area della superficie della sfera. Area della superficie della sfera come derivata del volume; volume della sfera come integrale dell'area della superficie.

- 29 novembre 2019 (2 ore)
Legge della quarta potenza in idraulica: descrizione del problema e calcolo della portata. Serie di Fourier: generalità, calcolo dei coefficienti per periodo 2π . Serie di Fourier: risultato di convergenza.
- 3 dicembre 2019 (2 ore)
Serie di Fourier per periodo $T > 0$. Serie di Fourier di soli seni per funzioni dispari e serie di Fourier di soli coseni per funzioni pari. Serie di Fourier per funzioni prolungate periodiche, prolungate pari o prolungate dispari. Esercizi: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Integrali impropri: generalità. Integrali impropri all'infinito: definizione.
- 4 dicembre 2019 (2 ore)
Integrabilità all'infinito di $x^{-\alpha}$ per $\alpha > 1$. Esempi di integrali impropri convergenti e divergenti. Criteri di confronto, confronto asintotico e convergenza assoluta. Integrabilità all'infinito di $\frac{\sin x}{x}$. Non integrabilità all'infinito di $\frac{|\sin x|}{x}$. Criterio di convergenza integrale per le serie.
- 5 dicembre 2019 (2 ore)
Convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ per $1 < \alpha < 2$. Integrali impropri al finito. Criteri di confronto, confronto asintotico e convergenza assoluta. Esempi ed esercizi. La funzione $\Gamma(x)$. Integrale di e^{-x^2} sulla retta reale.
- 6 dicembre 2019 (1 ora) Equazioni differenziali: generalità. Ordine. Non unicità della soluzione. Problema di Cauchy. Esempi.
- 17 dicembre 2019 (2 ore)
Linearità/non linearità. Equazioni differenziali nonlineari del primo ordine a variabili separabili. Esempi ed esercizi sulle equazioni nonlineari del primo ordine a variabili separabili: crescita con effetto di soglia, datazione al carbonio 14. Equazioni differenziali lineari del primo ordine, omogenee e non-omogenee.
- 18 dicembre 2019 (2 ore)
Equazioni differenziali lineari del primo ordine omogenee: soluzione generale e soluzione del problema di Cauchy. Caso non-omogeneo: struttura dell'insieme delle soluzioni.
- 19 dicembre 2019 (2 ore)
Caso non-omogeneo: determinazione della soluzione particolare (metodo di variazione della costante arbitraria), soluzione generale e soluzione del problema di Cauchy. Esempi ed esercizi sulle equazioni lineari del primo ordine. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Soluzione generale dell'equazione omogenea: polinomio associato. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenee. Metodo di variazione delle costanti (cenno essenziale).
- 20 dicembre 2019 (1 ora)
Metodo di somiglianza (esponenziali, seni/coseni, polinomi). Analisi dei casi in cui il termine noto $Q(x)$ è una soluzione dell'equazione omogenea. Esempi ed esercizi.