

**Diario del corso di Analisi Matematica 1**  
**(a.a. 2015/16)**

- 14 settembre 2015 (1 ora)  
Presentazione del corso.
- 16 settembre 2015 (2 ore)  
Numeri naturali, interi, razionali, reali.  $\sqrt{2}$  non è razionale. Introduzione alle funzioni.
- 17 settembre 2015 (2 ore)  
Funzioni di variabile reale a valori reali. Potenze ad esponente intero positivo, polinomi, funzioni razionali, radici, potenze ad esponente razionale positivo.  $x^0 = 1$ . Potenze ad esponente razionale (di segno qualsiasi), esponenziali. Funzione distanza dall'origine (modulo).
- 18 settembre 2015 (2 ore)  
Funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente). Funzioni periodiche, pari, dispari, monotone, limitate. Composizione di funzioni. Funzione inversa. Funzioni iniettive.
- 21 settembre 2015 (2 ore)  
Funzioni surgettive e funzioni biunivoche. Funzioni elementari inverse: radici, logaritmi, arcoseno, arccoseno, arcotangente. Numeri complessi: forma algebrica. Somma, prodotto per numeri reali, prodotto, rapporto. Parte reale e parte immaginaria, coniugato, modulo.
- 23 settembre 2015 (2 ore)  
Forma trigonometrica di un numero complesso. Formula di Eulero:  $e^{\pi \cdot i} + 1 = 0$ . Forma esponenziale di un numero complesso. Potenze e radici  $k$ -esime. Esempi.
- 24 settembre 2015 (2 ore)  
Esercizi sui numeri complessi. Limiti: motivazioni del concetto e costruzione “intuitiva” della definizione.
- 25 settembre 2015 (2 ore)  
Limiti: definizioni formali. Proprietà (unicità, eventuale non esistenza, somma, prodotto per costanti, prodotto, rapporto). Forme indeterminate:  $+\infty - \infty$ ,  $\infty \cdot 0$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\frac{0}{0}$ .
- 28 settembre 2015 (1 ora)  
Estensione dell'algebra dei limiti ai casi non coperti dalla teoria standard (funzioni che tendono all'infinito): esempi. Esempi ed esercizi sulle forme indeterminate (funzioni razionali).
- 30 settembre 2015 (2 ore)  
Successioni: definizione. Successioni e funzioni limitate, limitate superiormente, limitate inferiormente. Massimo e minimo. Maggioranti e minoranti. Il minimo dei maggioranti esiste sempre: estremo superiore. Il massimo dei minoranti esiste sempre: estremo inferiore. Le successioni monotone o convergono o divergono. Teorema di compressione (o “dei due carabinieri”).

- 1 ottobre 2015 (2 ore)  
Il numero  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Limite per  $x \rightarrow 0$  di  $\frac{e^x - 1}{x}$ ,  $\frac{\log(1+x)}{x}$  (e analoghi in base  $A$ ),  $\frac{\sin x}{x}$ ,  $\frac{1 - \cos x}{x^2}$ ,  $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ ,  $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ ,  $\frac{\operatorname{arcsin} x}{x}$ ,  $\frac{\operatorname{arccos} x}{x}$ . Esempi ed esercizi.
- 2 ottobre 2015 (2 ore)  
Gerarchie di infinitesimi ed infiniti. Esempi ed esercizi. Successione (funzione) limitata per successione (funzione) infinitesima è infinitesima. Successione (funzione) convergente è limitata (localmente limitata). Teoremi della permanenza del segno.
- 5 ottobre 2015 (1 ora)  
Osservazioni sui teoremi della permanenza del segno. Logaritmi e regolo calcolatore. Funzioni continue: definizione. Esempi di discontinuità: salto, eliminabile.
- 7 ottobre 2015 (2 ore)  
Esempi di discontinuità: oscillazioni non smorzate “impacchettate” in un intervallo di lunghezza arbitrariamente piccola. Proprietà delle funzioni continue: somma, prodotto per costanti, prodotto, rapporto, composizione. Inversa di funzione continua su un intervallo è continua. Teorema di esistenza degli zeri: metodo di bisezione.
- 8 ottobre 2015 (2 ore)  
Teorema dei valori intermedi. Metodo di bisezione come metodo di approssimazione. Esempi. Teorema di Bolzano-Weierstrass e teorema di Weierstrass.
- 9 ottobre 2015 (2 ore)  
Esercizi ed esempi sull’esistenza degli zeri e su varianti del teorema di Weierstrass. Derivata: definizione. Una funzione derivabile è continua. Retta tangente come limite di rette secanti e come retta di migliore approssimazione.
- 12 ottobre 2015 (1 ora)  
Differenziabilità. Derivabilità e differenziabilità sono equivalenti. Regole di derivazione: somma, prodotto per costanti, prodotto, rapporto.
- 14 ottobre 2015 (2 ore)  
Derivata di funzione composta. Derivata della funzione inversa. Derivata di  $x^k$ ,  $k \geq 0$ ;  $e^x$ ;  $A^x$ ;  $\sin x$ ;  $\cos x$ ;  $\operatorname{tg} x$ ;  $\operatorname{arcsin} x$ ;  $\operatorname{arccos} x$ ;  $\operatorname{arctg} x$ ;  $x^r$ ,  $r \in \mathbf{R}$ .
- 15 ottobre 2015 (2 ore)  
Derivata di  $\log x$ . Esercizi di derivazione. Metodo di Newton. Metodo di Erone. Funzioni iperboliche:  $\sinh x$ ,  $\cosh x$ . Massimi e minimi relativi ed assoluti: generalità. Teorema di Fermat. Esempi ed esercizi.
- 16 ottobre 2015 (2 ore)  
Se  $f$  è derivabile e crescente, allora  $f' \geq 0$ . Teorema di Lagrange. Esempi. Se  $f$  è definita in un intervallo ed è derivabile con  $f' \geq 0$ , allora  $f$  è crescente.
- 19 ottobre 2015 (1 ora)  
Se  $f$  è definita in un intervallo ed è derivabile con  $f' > 0$ , allora  $f$  è strettamente crescente. Se  $f$  è definita in un intervallo ed è derivabile con  $f' = 0$ , allora  $f$  è costante. Teoremi di Rolle e di Cauchy. Convessità e concavità: definizione. Caratterizzazione con segno di  $f''$ .

- 21 ottobre 2015 (2 ore)  
Punti di flesso. Azzeramento di  $f''$  nei punti di flesso. Esempi ed esercizi. Segno di  $f''$  e punti di massimo e minimo relativo. Derivabilità come limite di derivate. Convessità e retta tangente.
- 22 ottobre 2015 (2 ore)  
Asintoti obliqui. Studio di grafici. Esempi ed esercizi. Regola di de l'Hôpital: inizio del discorso.
- 23 ottobre 2015 (2 ore)  
Regola di de l'Hôpital. Esempi ed esercizi. Approssimazione polinomiale: derivazione del polinomio approssimante.
- 26 ottobre 2015 (1 ora)  
Formula di Taylor con resto di Peano. Esempi. Sviluppo di  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$ .
- 28 ottobre 2015 (2 ore)  
Sviluppo di  $\log(1+x)$ ,  $\frac{1}{1-x}$ , cenni allo sviluppo di  $\frac{1}{1+x^2}$ ,  $\arctg x$ . Esempi ed esercizi. Infinitesimi di ordine superiore:  $o(x^k)$ .
- 29 ottobre 2015 (2 ore)  
Esempi ed esercizi sui limiti con la formula di Taylor. Polinomio di Taylor come unico polinomio che coincide con la funzione fino alla derivata  $N$ -esima. Formula di Taylor con resto di Lagrange. Calcolo approssimato di  $e$ . Controllo dell'errore in funzione di  $N$ . Sviluppo in grande di  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ .
- 30 ottobre 2015 (2 ore)  
Sviluppo in grande di  $\log(1+x)$  per  $-1 < x \leq 1$ . Figure sull'approssimazione di Taylor. Serie numeriche: introduzione. Achille e la tartaruga. Definizione di convergenza, divergenza, indeterminazione. Serie di Taylor di  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\log(1+x)$  (per  $-1 < x \leq 1$ ).
- 9 novembre 2015 (1 ora)  
Serie geometriche. Esempi ed esercizi. Condizione necessaria per la convergenza. La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  è divergente.
- 11 novembre 2015 (2 ore)  
Numeri periodici come numeri razionali. Serie telescopiche. Serie di Mengoli. Criterio di confronto e di confronto asintotico. La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  è convergente. Esempi ed esercizi.
- 12 novembre 2015 (2 ore)  
Criteri del rapporto e della radice. Criterio di convergenza assoluta. Criterio di Leibniz. Esempi.
- 13 novembre 2015 (2 ore)  
Esercizi sulle serie. Serie di potenze (anche in campo complesso). Raggio di convergenza e suo calcolo. Serie di Taylor: rivisitazione per  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ .
- 16 novembre 2015 (1 ora)  
Formula di Eulero. Derivazione ed antiderivazione termine a termine. Esempio di funzione  $C^\infty$  che non coincide con la sua serie di Taylor.

- 18 novembre 2015 (1 ora)  
Esercizi su derivazione ed antiderivazione termine a termine per serie di potenze. La funzione di Weierstrass, continua e mai derivabile. La funzione zeta di Riemann.
- 19 novembre 2015 (2 ore)  
Integrali: definizione come limite di somme di Cauchy–Riemann (limite di somme di aree di rettangoli approssimanti). Le funzioni continue sono integrabili. Le funzioni monotone sono integrabili. Esempio di funzione non integrabile. Proprietà dell'integrale: linearità, positività, monotonia, additività. Calcolo dell'integrale di  $x$  e di  $x^2$  con le somme di Cauchy–Riemann (esempio di Gauss).
- 20 novembre 2015 (2 ore)  
Versione intuitiva del teorema fondamentale del calcolo. Teorema della media integrale. Teorema fondamentale del calcolo. Esempi ed esercizi di integrazione diretta. Integrazione per parti.
- 23 novembre 2015 (1 ora)  
Esempi ed esercizi di integrazione per parti. Integrazione per cambiamento di variabile.
- 25 novembre 2015 (2 ore)  
Esempi ed esercizi di integrazione per cambiamento di variabile. Integrale di  $\sqrt{a^2 - x^2}$ : area del cerchio. Integrale di  $\sqrt{a^2 + x^2}$  e di  $\sqrt{x^2 - a^2}$ .
- 26 novembre 2015 (2 ore)  
Cambiamento di variabile  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  (cioè  $t = \tan \frac{x}{2}$ ). Integrali razionali con denominatore di secondo grado. Esempi ed esercizi.
- 27 novembre 2015 (2 ore)  
Volume di solidi di rotazione, principio di Cavalieri, lunghezza di grafici, aree di superfici di rotazione. Volume della sfera. Volume del toro. Volume della piramide. Area della superficie della sfera.
- 30 novembre 2015 (1 ora)  
Legge della quarta potenza in idraulica. Serie di Fourier: generalità. Calcolo dei coefficienti per periodo  $2\pi$ .
- 2 dicembre 2015 (2 ore)  
Serie di Fourier: risultato di convergenza. Calcolo dei coefficienti per periodo  $T > 0$ .  
Serie di Fourier di soli seni e serie di Fourier di soli coseni. Calcolo di  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

- 3 dicembre 2015 (2 ore)  
Integrali impropri: generalità. Integrali impropri all'infinito: definizione. Criteri di confronto, confronto asintotico e convergenza assoluta. Esempi ed esercizi. Criterio di convergenza integrale per le serie. Integrabilità all'infinito di  $x^{-\alpha}$  per  $1 < \alpha < 2$ . Integrabilità all'infinito di  $\frac{\sin x}{x}$ .
- 4 dicembre 2015 (2 ore)  
Non integrabilità all'infinito di  $\frac{|\sin x|}{x}$ . Integrali impropri al finito. Criteri di confronto, confronto asintotico e convergenza assoluta. Esempi ed esercizi. La funzione  $\Gamma(x)$ .
- 9 dicembre 2015 (2 ore)  
Integrale di  $e^{-x^2}$  sulla retta reale. Equazioni differenziali: generalità. Ordine, linearità. Esempi. Non unicità della soluzione. Problema di Cauchy. Equazioni differenziali nonlineari del primo ordine a variabili separabili.
- 10 dicembre 2015 (2 ore)  
Esempi ed esercizi. Equazioni differenziali lineari del primo ordine, omogenee e non-omogenee. Struttura dell'insieme delle soluzioni. Caso omogeneo: soluzione generale e soluzione del problema di Cauchy. Caso non-omogeneo: formula per la soluzione particolare (metodo di variazione della costante arbitraria), soluzione generale e soluzione del problema di Cauchy.
- 11 dicembre 2015 (2 ore)  
Esempi ed esercizi sulle equazioni lineari del primo ordine. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Soluzione generale dell'equazione omogenea: polinomio associato.
- 17 dicembre 2015 (2 ore)  
Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenee. Metodo di variazione delle costanti (cenni). Metodo di somiglianza (esponenziali, seni/coseni, polinomi). Esempi ed esercizi.
- 18 dicembre 2015 (2 ore)  
Risonanza. Pennello di Peano. Esempi ed esercizi riassuntivi sulle equazioni differenziali.