

Diario del corso di Analisi Matematica 1
(a.a. 2017/18)

- 22 settembre 2017 (2 ore)
Presentazione del corso. Numeri naturali, interi, razionali, reali. $\sqrt{2}$ non è razionale. Come si risolve $x^2 + 1 = 0$?
- 25 settembre 2017 (2 ore)
Funzioni di variabile reale a valori reali. Potenze ad esponente intero positivo, polinomi. L'approssimazione polinomiale è efficace. Funzioni razionali, radice k -esima, potenze ad esponente razionale positivo. $x^0 = 1$. Potenze ad esponente razionale (di segno qualsiasi).
- 26 settembre 2017 (2 ore)
Potenze ad esponente reale, esponenziali. Funzione distanza dall'origine (modulo). Funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente). Composizione di funzioni. Funzione inversa. Funzioni elementari inverse: radici, logaritmi, arcoseno, arcocoseno,
- 27 settembre 2017 (2 ore)
Funzioni elementari inverse: arcotangente. Funzioni iniettive, surgettive, bigettive (biunivoche). Funzioni periodiche, pari, dispari, monotone, limitate. Numeri complessi: forma algebrica. Rappresentazione nel piano. Somma, prodotto, rapporto. Parte reale e parte immaginaria, coniugato, modulo.
- 28 settembre 2017 (2 ore)
Forma trigonometrica di un numero complesso. Prodotto e potenze in forma trigonometrica. Formula di Eulero: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Forma esponenziale di un numero complesso. Potenze e radici k -esime. Esempi ed esercizi tipici.
- 29 settembre 2017 (2 ore)
Limiti: motivazioni del concetto. Definizioni formali. Proprietà (somma, prodotto per costanti, prodotto, rapporto). Estensione dell'algebra dei limiti ai casi non coperti dalla teoria standard (funzioni che tendono all'infinito). Forme indeterminate: $+\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$. Limiti: unicità, eventuale non esistenza.
- 9 ottobre 2017 (2 ore)
Massimo e minimo. Maggioranti e minoranti. Il minimo dei maggioranti esiste sempre: estremo superiore. Il massimo dei minoranti esiste sempre: estremo inferiore. Successioni: definizione. Successioni e funzioni limitate, limitate superiormente, limitate inferiormente.
- 10 ottobre 2017 (1 ora)
Le successioni monotone o convergono o divergono. Il numero $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Limite per $x \rightarrow 0$ di $\frac{e^x - 1}{x}$, $\frac{\log(1+x)}{x}$ (e analoghi risultati in base A). Teorema di compressione (o "dei due carabinieri").
- 11 ottobre 2017 (2 ore)
Limite per $x \rightarrow 0$ di $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{1 - \cos x}{x^2}$, $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$, $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$, $\frac{\operatorname{arcsin} x}{x}$. Esempi ed esercizi. Gerarchie di infinitesimi ed infiniti. Logaritmi e regolo calcolatore.

- 12 ottobre 2017 (2 ore)
Successione (funzione) limitata per successione (funzione) infinitesima è infinitesima. Successione (funzione) convergente è limitata (localmente limitata). Teoremi della permanenza del segno e osservazioni al riguardo. Funzioni continue: definizione. Esempi di discontinuità: salto, eliminabile, oscillazioni non smorzate “impacchettate” in un intervallo di lunghezza arbitrariamente piccola.
- 13 ottobre 2017 (2 ore)
Proprietà delle funzioni continue: somma, prodotto per costanti, prodotto, rapporto, composizione. Inversa di funzione continua su un intervallo è continua. Teorema di esistenza degli zeri: metodo di bisezione. Stima dell'errore di approssimazione nel metodo di bisezione. Teorema dei valori intermedi.
- 16 ottobre 2017 (1 ora)
Esercizi sul teorema di esistenza degli zeri.
- 18 ottobre 2017 (2 ore)
Teorema di Weierstrass: enunciato, osservazioni sulle ipotesi, dimostrazione. Teorema di Bolzano-Weierstrass. Varianti del teorema di Weierstrass. Derivata e derivabilità: definizione. Retta tangente come limite di rette secanti.
- 19 ottobre 2017 (2 ore)
Retta tangente come retta di migliore approssimazione. Differenziabilità: definizione. Derivabilità e differenziabilità sono equivalenti. La derivabilità implica la continuità. Regole di derivazione: prodotto per costanti, somma, prodotto, reciproco, rapporto. Derivata di funzione composta. Derivata della funzione inversa. Derivata di x^k ($k \geq 0$); e^x ; A^x ; $\sin x$; $\cos x$.
- 20 ottobre 2017 (2 ore)
Derivata di $\operatorname{tg} x$; x^r ($r \in \mathbf{R}, x > 0$); $\log x$; $\arcsin x$; $\arccos x$; $\operatorname{arctg} x$. Funzioni iperboliche: $\sinh x$, $\cosh x$. Esempi ed esercizi. Metodo di Newton.
- 23 ottobre 2017 (1 ora)
Metodo di Erone. Massimi e minimi relativi ed assoluti: generalità. Teorema di Fermat. Massimi e minimi in un intervallo chiuso e limitato.
- 25 ottobre 2017 (2 ore)
Esempi ed esercizi su massimi e minimi in un intervallo chiuso e limitato. Se f è derivabile e crescente, allora $f' \geq 0$. Teorema di Lagrange. Teoremi di Rolle e di Cauchy. Esempi.
- 26 ottobre 2017 (2 ore)
Se f è definita in un intervallo ed è derivabile con $f' \geq 0$ (rispettivamente, $f' > 0$), allora f è crescente (rispettivamente, strettamente crescente). Se f è definita in un intervallo ed è derivabile con $f' = 0$, allora f è costante. Regola di de l'Hôpital. Esempi ed esercizi.
- 27 ottobre 2017 (2 ore)
Derivabilità come limite di derivate. Asintoti obliqui. Esempi ed esercizi. Convessità e concavità: definizione. Caratterizzazione con segno di f'' . Convessità e retta tangente.
- 6 novembre 2017 (1 ora)
Punti di flesso. Azzeramento di f'' nei punti di flesso. Esempi. Segno di f'' e punti di massimo e minimo relativo.

- 8 novembre 2017 (2 ore)
Studio di grafici. Esempi ed esercizi. Approssimazione polinomiale: derivazione del polinomio approssimante. Formula di Taylor con resto di Peano. Esempi.
- 9 novembre 2017 (2 ore)
Sviluppo di $\sin x$, $\cos x$, e^x , $\log(1+x)$, $\tan x$. Esempi ed esercizi sui limiti con la formula di Taylor.
- 10 novembre 2017 (2 ore)
Sviluppo di $\frac{1}{1-x}$; cenni allo sviluppo di $\frac{1}{1+x^2}$, $\operatorname{arctg} x$. Infinitesimi di ordine superiore $o(x^k)$ e loro proprietà. Polinomio di Taylor come unico polinomio che coincide con la funzione fino alla derivata N -esima. Formula di Taylor con resto di Lagrange.
- 13 novembre 2017 (1 ora)
Controllo dell'errore in funzione di N . Sviluppo in grande di e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$ (per $-1 < x \leq 1$).
- 15 novembre 2017 (2 ore)
Calcolo approssimato di $\cos \frac{1}{2}$. Figure sull'approssimazione di Taylor. Serie numeriche: introduzione. Achille e la tartaruga. Serie numeriche: definizione di convergenza, divergenza, indeterminazione.
- 16 novembre 2017 (2 ore)
Serie geometriche. Serie di Taylor di e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$ (per $-1 < x \leq 1$). Serie telescopiche. Serie di Mengoli. Condizione necessaria per la convergenza. Le serie a termini positivi o convergono o divergono positivamente. Criterio di confronto e di confronto asintotico. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente. Esempi ed esercizi.
- 17 novembre 2017 (2 ore)
Esercizi: sviluppi di Taylor di funzioni composte; numeri periodici come numeri razionali. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente. Serie armoniche. Criteri del rapporto e della radice. Esempi ed esercizi.
- 20 novembre 2017 (1 ora)
Criterio di convergenza assoluta. Criterio di Leibniz. Esempi.
- 22 novembre 2017 (2 ore)
Serie di potenze. Raggio di convergenza e suo calcolo. Serie di Taylor. Derivazione ed antiderivazione termine a termine. Esempi ed esercizi.
- 23 novembre 2017 (2 ore)
Esempio di funzione C^∞ che non coincide con la sua serie di Taylor. Esercizi su derivazione ed antiderivazione termine a termine per serie di potenze. Serie di potenze in campo complesso. Serie di Taylor: rivisitazione per e^z , $\sin z$, $\cos z$. Formula di Eulero.
- 27 novembre 2017 (1 ora)
La funzione di Weierstrass, continua e mai derivabile: definizione, osservazioni e immagini. La funzione zeta di Riemann.

- 27 novembre 2017 (2 ore) / 28 novembre 2017 (2 ore)
Integrali: definizione come limite di somme di Cauchy–Riemann (limite di somme di aree di rettangoli approssimanti). Le funzioni continue sono integrabili. Le funzioni monotone sono integrabili. Esempio di funzione non integrabile. Proprietà dell'integrale: linearità, positività, monotonia, additività. Calcolo dell'integrale di x e di x^2 con le somme di Cauchy–Riemann (esempio di Gauss).
- 29 novembre 2017 (2 ore)
Versione intuitiva del teorema fondamentale del calcolo. Teorema della media integrale. Teorema fondamentale del calcolo. Esempi ed esercizi di integrazione diretta.
- 30 novembre 2017 (2 ore)
Integrazione per parti: formula ed esempi. Integrazione per cambiamento di variabile. Integrale di $\sqrt{a^2 - x^2}$: area del cerchio.
- 1 dicembre 2017 (2 ore)
Integrale di $\sqrt{a^2 + x^2}$ e di $\sqrt{x^2 - a^2}$. Esercizi di integrazione per parti e per cambiamento di variabile.
- 6 dicembre 2017 (2 ore)
Volume di solidi di rotazione, principio di Cavalieri. Volume della sfera. Volume della piramide. Volume di un cono generico. Volume del toro. Lunghezza di grafici, aree di superfici di rotazione. Area della superficie della sfera.
- 7 dicembre 2017 (2 ore)
Legge della quarta potenza in idraulica. Cambiamento di variabile $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ (cioè $t = \tan \frac{x}{2}$). Integrali razionali con denominatore di secondo grado. Divisione di polinomi. Esempi ed esercizi.
- 11 dicembre 2017 (1 ora)
Serie di Fourier: generalità, calcolo dei coefficienti per periodo 2π e per periodo $T > 0$. Serie di Fourier di soli seni per funzioni dispari e serie di Fourier di soli coseni per funzioni pari.
- 13 dicembre 2017 (2 ore)
Serie di Fourier: risultato di convergenza. Serie di Fourier per funzioni prolungate periodiche, prolungate pari o prolungate dispari. Esercizi: calcolo esplicito di alcuni coefficienti di Fourier.
- 14 dicembre 2017 (2 ore)
Integrali impropri: generalità. Integrali impropri all'infinito: definizione. Criteri di confronto, confronto asintotico e convergenza assoluta. Esempi. Integrabilità all'infinito di $x^{-\alpha}$ per $\alpha > 1$. Integrabilità all'infinito di $\frac{\sin x}{x}$. Non integrabilità all'infinito di $\frac{|\sin x|}{x}$.
- 15 dicembre 2017 (2 ore)
Criterio di convergenza integrale per le serie. Convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ per $1 < \alpha < 2$.
Integrali impropri al finito. Criteri di confronto, confronto asintotico e convergenza assoluta. Esempi ed esercizi. La funzione $\Gamma(x)$. Integrale di e^{-x^2} sulla retta reale.

- 19 dicembre 2017 (2 ore)
Equazioni differenziali: generalità. Ordine, linearità. Esempi. Non unicità della soluzione. Problema di Cauchy. Equazioni differenziali nonlineari del primo ordine a variabili separabili.
- 20 dicembre 2017 (2 ore)
Esempi ed esercizi sulle equazioni nonlineari del primo ordine a variabili separabili. Equazioni differenziali lineari del primo ordine, omogenee e non-omogenee. Struttura dell'insieme delle soluzioni. Caso omogeneo: soluzione generale e soluzione del problema di Cauchy. Caso non-omogeneo: determinazione della soluzione particolare (metodo di variazione della costante arbitraria).
- 21 dicembre 2017 (2 ore)
Caso non-omogeneo: soluzione generale e soluzione del problema di Cauchy. Esempi ed esercizi sulle equazioni lineari del primo ordine. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Soluzione generale dell'equazione omogenea: polinomio associato.
- 22 dicembre 2017 (2 ore)
Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenee. Metodo di variazione delle costanti (cenni). Metodo di somiglianza (esponenziali, seni/coseni, polinomi). Esempi ed esercizi.