Green, Gauss, Stokes e quella roba lì

- Sia $P(x_1, x_2)$ una funzione di classe C^1, e sia D un insieme x_2-semplice, compreso fra i grafici delle funzioni $g(x_1)$ e $h(x_1)$, con $x_1 \in [a, b]$, $g(x_1) \leq h(x_1)$ per ogni $x_1 \in [a, b]$, e g ed h di classe C^1.
  Allora

  $$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial x_2}\, dx_1 dx_2 = \int\limits_{\partial D} P\, n_2\, ds\,, \tag{1}$$

  ove $\mathbf{n}$ è il versore normale alla curva ∂D che punta verso l'esterno di D.

  Si ha, poiché D è x_2-semplice,

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial x_2}\, dx_1 dx_2 = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x_1)}^{h(x_1)} \frac{\partial P}{\partial x_2}\, dx_2 \right) dx_1 = \int\limits_a^b P(x_1, h(x_1))\, dx_1 - \int\limits_a^b P(x_1, g(x_1))\, dx_1\,.$$

D'altro canto, considerando la curva γ_h data dal grafico di $h(x_1)$, nel punto $(x_1, h(x_1)$ il suo versore normale diretto verso l'esterno di D, cioè verso l'alto, è dato da

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + [h'(x_1)]^2}}(-h'(x_1), 1)$$

[la curva è il luogo di zeri di $H(x_1, x_2) = x_2 - h(x_1)$...], mentre, come sempre per un grafico, si può esprimere l'elemento di lunghezza d'arco [la variazione di ascissa curvilinea] come $ds = \sqrt{1 + [h'(x_1)]^2}\, dx_1$. Quindi sulla curva γ_h si ha $n_2\, ds = dx_1$.

In modo analogo, sempre considerando il versore normale che punta verso l'esterno di D, sulla curva γ_g data dal grafico di $g(x_1)$ si ha $-n_2\, ds = dx_1$ [il segno $-$ è dovuto al fatto che il versore normale diretto verso l'esterno punta verso il basso...].

Quindi

$$\int\limits_a^b P(x_1, h(x_1))\, dx_1 = \int\limits_{\gamma_h} P\, n_2\, ds \quad , \quad \int\limits_a^b P(x_1, g(x_1))\, dx_1 = -\int\limits_{\gamma_g} P\, n_2\, ds$$

Siccome sui due segmenti verticali che congiungono $(a, g(a))$ e $(a, h(a))$, $(b, g(b))$ e $(b, h(b))$ si ha $n_2 = 0$ [la normale è orizzontale...], e siccome ∂D è l'unione di γ_h, γ_g e di questi due segmenti, la relazione (1) è dimostrata.

- Sia $Q(x_1, x_2)$ una funzione di classe C^1, e sia D un insieme x_1-semplice, compreso fra i grafici delle funzioni $k(x_2)$ e $l(x_2)$, con $x_2 \in [c, d]$, $k(x_2) \leq l(x_2)$ per ogni $x_2 \in [c, d]$, e k ed l di classe C^1.
  Allora

  $$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x_1}\, dx_1 dx_2 = \int\limits_{\partial D} Q\, n_1\, ds\,, \tag{2}$$

  ove $\mathbf{n}$ è il versore normale alla curva ∂D che punta verso l'esterno di D.

  La dimostrazione è del tutto analoga a quella del caso precedente.

- **Teorema di Gauss o della divergenza (nel piano)**
  Sia $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ un campo vettoriale di classe C^1 nelle variabili (x_1, x_2) e si definisca $\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}$.
  Sia inoltre D un insieme che si può decomporre nell'unione di un numero finito di insiemi D_j, ciascuno

dei quali sia contemporaneamente x_2-semplice e x_1-semplice, e sia compreso fra i grafici di funzioni di classe C^1. Allora

$$\iint_D \operatorname{div}\mathbf{v}\, dx_1 dx_2 = \int_{\partial D} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, ds\,, \tag{3}$$

ove $\mathbf{n}$ è il versore normale alla curva ∂D che punta verso l'esterno di D.
[Si noti che l'ipotesi che D sia decomponibile come sopra richiesto è soddisfatta da ogni insieme che abbia una geometria "normale".]

Per ogni insieme D_j della decomposizione di D si possono utilizzare sia la relazione (1) che la relazione (2), con $P = v_2$ e $Q = v_1$. Tenendo inoltre conto dell'additività dell'integrale si ha

$$\iint_D \operatorname{div}\mathbf{v}\, dx_1 dx_2 = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} + \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = \sum_j \iint_{D_j} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} + \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2$$
$$= \sum_j \int_{\partial D_j} (Q\, n_1 + P\, n_2)\, ds = \sum_j \int_{\partial D_j} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, ds\,.$$

I pezzi di bordo di ∂D_j che sono interni a D (cioè non sono sul bordo di D) sono contati due volte, poiché bordo di due insiemi adiacenti. Dunque la normale esterna su di essi è di verso opposto, e gli integrali corrispondenti si eliminano a due a due. Rimane così

$$\iint_D \operatorname{div}\mathbf{v}\, dx_1 dx_2 = \sum_j \int_{\partial D_j \cap \partial D} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, ds = \int_{\partial D} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, ds\,,$$

avendo ancora utilizzato l'additività dell'integrale.

- Sia $P(x_1, x_2)$ una funzione di classe C^1, e sia D un insieme x_2-semplice, compreso fra i grafici delle funzioni $g(x_1)$ e $h(x_1)$, con $x_1 \in [a,b]$, $g(x_1) \le h(x_1)$ per ogni $x_1 \in [a,b]$, e g ed h di classe C^1.
Allora

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial x_2}\, dx_1 dx_2 = -\int_{\partial^+ D} (P, 0)\cdot d\mathbf{r}\,, \tag{4}$$

ove con $\partial^+ D$ si intende che la curva ∂D è percorsa lasciando l'insieme D a sinistra.

La curva γ_h, percorsa nel verso crescente delle x_1, può essere parametrizzata come $\gamma_h(x_1) = (x_1, h(x_1))$, per cui il versore tangente $\mathbf{T}$ è dato da $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{1+[h'(x_1)]^2}}(1, h'(x_1))$, cioè su questa curva $T_1 = n_2$ e $T_2 = -n_1$. Analogamente, la curva γ_g, percorsa nel verso crescente delle x_1, può essere parametrizzata come $\gamma_g(x_1) = (x_1, g(x_1))$, per cui il versore tangente $\mathbf{T}$ è dato da $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{1+[g'(x_1)]^2}}(1, g'(x_1))$, cioè su questa curva $T_1 = -n_2$ e $T_2 = n_1$ [su γ_g la normale esterna punta verso il basso...]. Dunque $P\, n_2\, ds = P\, T_1\, ds$ su γ_h e $P\, n_2\, ds = -P\, T_1\, ds$ su γ_g.
Quindi dalla relazione (1)

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial x_2}\, dx_1 dx_2 = \int_{\partial D} P\, n_2\, ds = \int_{\gamma_h} P\, T_1\, ds - \int_{\gamma_g} P\, T_1\, ds\,,$$

essendo $n_2 = 0$ sui due segmenti verticali che appartengono a ∂D. Sulla curva γ_g, percorsa lasciando a sinistra l'insieme D, si ha $(P, 0)\cdot d\mathbf{r} = (P, 0)\cdot \mathbf{T}\, ds = P\, T_1\, ds$; sulla curva γ_h, anch'essa percorsa lasciando a sinistra l'insieme D, si ha invece $(P, 0)\cdot d\mathbf{r} = -(P, 0)\cdot \mathbf{T}\, ds = -P\, T_1\, ds$. Sui due segmenti verticali infine il versore tangente è verticale, per cui $(P, 0)\cdot d\mathbf{r} = 0$. Sommando i contributi provenienti da γ_h, γ_g e i due segmenti verticali si ottiene quindi la relazione (4).

- Sia $Q(x_1, x_2)$ una funzione di classe C^1, e sia D un insieme x_1-semplice, compreso fra i grafici delle funzioni $k(x_2)$ e $l(x_2)$, con $x_2 \in [c,d]$, $k(x_2) \le l(x_2)$ per ogni $x_2 \in [c,d]$, e k ed l di classe C^1.
Allora

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x_1}\, dx_1 dx_2 = \int\limits_{\partial^+ D} (0, Q) \cdot d\mathbf{r}\,, \tag{5}$$

ove con $\partial^+ D$ si intende che la curva ∂D è percorsa lasciando l'insieme D a sinistra.

La dimostrazione è del tutto analoga a quella del caso precedente. L'unico punto che richiede una verifica riguarda il verso di percorrenza del bordo: per un insieme x_1-semplice, percorrerlo lasciando a sinistra l'insieme corrisponde a percorrere la curva γ_l (quella più lontana dall'asse x_2) nel verso crescente delle x_2 e la curva γ_k (quella più vicina all'asse x_2) nel verso decrescente delle x_2, e questo è l'opposto di quello che accade per un insieme x_2-semplice. Dunque in (5) ci deve essere il segno opposto a quello che appare in (4).

- **Teorema di Green, o di Stokes (nel piano), o del rotore (nel piano)**
Se $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ è un campo vettoriale di classe C^1 nelle variabili (x_1, x_2, x_3), si definisce

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \Big(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \Big)\,.$$

[Formalmente, $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ si ottiene facendo

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}\,,$$

o anche, con altra notazione, $\nabla \times \mathbf{v}$.]
Si consideri un campo vettoriale bidimensionale (v_1, v_2), dipendente dalle variabili x_1 e x_2, di classe C^1 e si definisca $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)$. Sia inoltre D un insieme del piano che si può decomporre nell'unione di un numero finito di insiemi D_j, ciascuno dei quali sia contemporaneamente x_2-semplice e x_1-semplice, e sia compreso fra i grafici di funzioni di classe C^1. Allora (teorema di Stokes nel piano, o del rotore nel piano)

$$\iint\limits_D \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}\, dx_1 dx_2 = \int\limits_{\partial^+ D} (v_1, v_2) \cdot d\mathbf{r}\,. \tag{6}$$

In modo equivalente si può scrivere (teorema di Green)

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int\limits_{\partial^+ D} (v_1, v_2) \cdot d\mathbf{r}\,. \tag{7}$$

Per ogni insieme D_j in cui è decomposto D si possono utilizzare sia la relazione (4) che la relazione (5), con $P = v_1$ e $Q = v_2$. Tenendo inoltre conto dell'additività dell'integrale si ha

$$\begin{aligned} \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 &= \sum_j \iint\limits_{D_j} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \\ &= \sum_j \left(\int\limits_{\partial^+ D_j} (0, Q) \cdot d\mathbf{r} + \int\limits_{\partial^+ D_j} (P, 0) \cdot d\mathbf{r} \right) = \sum_j \int\limits_{\partial^+ D_j} (P, Q) \cdot d\mathbf{r}\,. \end{aligned}$$

I pezzi di bordo di ∂D_j che sono interni a D (cioè non sono sul bordo di D) sono contati due volte, poiché bordo di due insiemi adiacenti. Se si percorrono lasciando a sinistra l'insieme di cui sono bordo sono dunque percorsi in verso opposto, e quindi i relativi integrali si eliminano a due a due. Rimane così

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = \sum_j \int_{\partial^+ D_j \cap \partial^+ D} (P,Q)\cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial^+ D} (P,Q)\cdot d\mathbf{r}\,,$$

avendo ancora utilizzato l'additività dell'integrale.

Questa relazione può ovviamente essere riletta come

$$\iint_D \operatorname{rot}\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}\,dx_1dx_2 = \int_{\partial^+ D} (v_1,v_2)\cdot d\mathbf{r}\,.$$

- **Calcolo di aree**
  Tramite il teorema di Green si può calcolare l'area di un insieme del piano. Infatti, scegliendo per esempio $P(x_1,x_2) = -\frac{x_2}{2}$ e $Q(x_1,x_2) = \frac{x_1}{2}$, si ha

$$\text{area}\,(D) = \iint_D 1\,dx_1dx_2 = \frac{1}{2}\iint_D \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1} - \frac{\partial(-x_2)}{\partial x_2}\right) dx_1dx_2 = \frac{1}{2}\int_{\partial^+ D} (-x_2,x_1)\cdot d\mathbf{r}\,. \tag{8}$$

- **Teorema di Gauss o della divergenza (nello spazio)**
  Sia $\mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3)$ un campo vettoriale di classe C^1 nelle variabili (x_1,x_2,x_3) e si definisca $\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$. Sia inoltre D un insieme che si può decomporre nell'unione di un numero finito di insiemi D_j, ciascuno dei quali sia contemporaneamente x_3-semplice, x_2-semplice e x_1-semplice, e sia compreso fra i grafici di funzioni di classe C^1. Allora

$$\iiint_D \operatorname{div}\mathbf{v}\,dx_1dx_2dx_3 = \iint_{\partial D} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS\,, \tag{9}$$

  ove $\mathbf{n}$ è il versore normale alla superficie ∂D che punta verso l'esterno di D.

- **Teorema di Stokes o del rotore (nello spazio)**
  Sia $\mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3)$ un campo vettoriale di classe C^1 nelle variabili (x_1,x_2,x_3) e sia S una superficie orientabile regolare. Allora

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_{\partial^+ S} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}\,, \tag{6}$$

  ove $\mathbf{n}$ è il versore normale a S, e la notazione $\partial^+ S$ significa che la curva ∂S è percorsa tenendo a sinistra la superficie S mentre si "abbraccia" il versore $\mathbf{n}$.