Esercizio 3 (8 punti)

Si calcoli il volume della parte del cilindro infinito

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + 4y^2 \le 1,\ z \in \mathbf{R}\}$$

che è **compresa** fra i piani $z = 1$ e $x + y + z = 1$.

Risultato: $\boxed{\sqrt{5}/3}$

Calcoli:

La base del cilindro K è un'ellisse E, di semiassi 1 e $1/2$.
Intersecando i piani troviamo la retta $x+y=0$, dunque per $x+y>0$ il piano $z=1$ è più alto del piano $x+y+z=1$, mentre per $x+y<0$ accade viceversa.
Il volume richiesto è dato da

$$V = \iint_{E\cap\{x+y>0\}} dx\,dy \left(\int_{1-x-y}^{1} dz\right) + \iint_{E\cap\{x+y<0\}} dx\,dy \left(\int_{1}^{1-x-y} dz\right) \overset{\text{per simmetria...}}{=}$$

$$= 2\iint_{E\cap\{x+y>0\}} (x+y)\,dx\,dy\,.$$

(*) In coordinate ellittiche, θ non è l'angolo formato dalla semiretta che congiunge il punto con l'origine e dal semiasse positivo delle ascisse!!

Passiamo in coordinate ellittiche: $x = \rho\cos\theta$, $y = \frac{1}{2}\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, con jacobiano $\frac{1}{2}\rho$. La variazione di ρ è fra 0 e 1, mentre quella di θ va precisata (*). I punti di intersezione di $x+y=0$ con l'ellisse sono dati dalla soluzione di $y^2+4y^2=1$, cioè $y = \mp\frac{1}{\sqrt{5}}$, cui corrisponde $x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. L'angolo θ_1 corrispondente a $\left(+\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ è dunque dato da $+\frac{1}{\sqrt{5}} = \cos\theta_1$, $-\frac{2}{\sqrt{5}} = \mathrm{sen}\,\theta_1$; l'angolo θ_2 corrispondente a $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ è dato da $\frac{-1}{\sqrt{5}} = \cos\theta_2$, $\frac{2}{\sqrt{5}} = \mathrm{sen}\,\theta_2$. [Volendo, ma non è necessario: $\theta_1 = -\mathrm{arctg}\,2$, $\theta_2 = \pi - \mathrm{arctg}\,2$ ...]

L'integrale richiesto è dunque

$$\frac{1}{2}V = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_0^1 \frac{1}{2}\rho\left(\rho\cos\theta + \frac{1}{2}\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\right)d\rho = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \left(\frac{1}{6}\rho^3\cos\theta + \frac{1}{12}\rho^3\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=1} =$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{1}{6}\cos\theta + \frac{1}{12}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)d\theta = \frac{1}{6}\,\mathrm{sen}\,\theta\Big|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} - \frac{1}{12}\cos\theta\Big|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\mathrm{sen}\,\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1 - \frac{1}{2}\cos\theta_2 + \frac{1}{2}\cos\theta_1\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{5}}{6},$$

da cui $V = \sqrt{5}/3$.