Integrali doppi

1. Calcolare l'integrale doppio $\iint_\Omega f(x,y)dxdy$, con

   (a) $f(x,y) = xy^2$ e Ω il triangolo di vertici (-1,0), (1,0), (1,1).

   (b) $f(x,y) = x - y$ e $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$.

   (c) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ e $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{x^2}{2} \le y \le x^2,\ 1 \le x \le 2\}$.

   (d) $f(x,y) = \frac{\sin y^2}{y}$ e $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le y^2,\ 0 \le y \le \sqrt{\pi}\}$.

   (e) $f(x,y) = \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ e $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 4 \le x^2+y^2 \le 9,\ y \ge x\}$.

   (f) $f(x,y) = y$ e Ω è il semicerchio di raggio 1, con centro nel punto (1,0) e situato nel semipiano $y \ge 0$.

   (g) $f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ e Ω l'ellisse di semiassi a, b:
   $$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}.$$

   (h) $f(x,y) = e^{x/y}$ e Ω l'insieme delimitato dalle rette $y = 1$, $x = 0$ e dalla parabola $y^2 = x$.

   (i) $f(x,y) = xy^2$ e Ω l'insieme delimitato dalla parabola $y^2 = 2px$ e dalla retta $x = p$.

   (j) $f(x,y) = xy$ e Ω l'insieme delimitato dall'asse delle ascisse e dal semicerchio superiore $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

   (k) $f(x,y) = y$ e Ω l'insieme delimitato dall'asse dell'ascisse e da un arco della cicloide
   $$x(t) = R(t - \sin t), \qquad y(t) = R(1 - \cos t), \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

   (l) $f(x,y) = xy$ e Ω è l'insieme delimitato dagli assi coordinati e da un arco dell'astroide
   $$x(t) = R\cos^3 t, \qquad y(t) = R\sin^3 t, \qquad 0 \le t \le \pi/2.$$

2. Calcolare le coordinate (x_g, y_g) del baricentro di una lamina piana di forma $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 \le y \le 1\}$ e di densità data dalla funzione $f(x,y) = y$.

3. Calcolare le coordinate (x_g, y_g) del baricentro di una lamina piana omogenea Ω a forma di semicerchio:
   $$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0\}.$$

4. Calcolare le coordinate (x_g, y_g) del baricentro di una lamina piana omogenea a forma di cardioide, il cui bordo è la curva data in coordinate polari da $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

5. Calcolare l'area della figura piana limitata dagli archi delle parabole $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$, utilizzando un opportuno cambiamento di variabili.

6. Calcolare l'area della figura piana limitata dagli archi delle parabole $y^2 = x$, $y^2 = 2x$, e dalle iperboli $xy = 1$, $xy = 2$, utilizzando un opportuno cambiamento di variabili.

Soluzioni

1.(a) $\frac{1}{10}$

1.(b) 0

1.(c) $2\arctan 2 - \frac{3}{4}\pi + \arctan(1/2) + \frac{7}{2}\log(2) - \frac{3}{2}\log(5)$

1.(d) 1

1.(e) $-5\sqrt{2}/12$

1.(f) $\frac{2}{3}$

1.(g) $\frac{2}{3}\pi\, a\, b$

1.(h) $1/2$

1.(i) $8\sqrt{2}p^5/21$

1.(j) $4/3$

1.(k) $5\pi R^3/2$

1.(l) $R^4/80$

2. La massa della lamina è data da $M = \frac{4}{5}$.
   La coordinata x_G è data da $x_G = 0$
   La coordinata y_G è data da $y_G = \frac{5}{7}$

3. La massa della lamina è data da $M = \frac{\pi}{2}$
   La coordinata x_G è data da $x_G = \frac{4}{3\pi}$
   La coordinata y_G è data da $y_G = 0$

4. La massa della lamina è data da $M = \frac{3\pi}{2}$
   La coordinata x_G è data da $x_G = \frac{5}{6}$
   La coordinata y_G è data da: $y_G = 0$
5. 1/3
6. $\frac{1}{3}\log(2)$