

## Integrali tripli

1. Calcolare l'integrale triplo  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ , con

(a)  $f(x, y, z) = \frac{x+y}{z}$  e  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [1, 2]$ .

(b)  $f(x, y, z) = y^2 z$  e  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq xy\}$ .

(c)  $f(x, y, z) = \frac{1}{(y+1)^3}$  e

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 < z \leq 1, 0 < y \leq x + z\}.$$

2. Calcolare il volume di

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

3. Calcolare il baricentro di una semisfera omogenea di densità uguale a 1, situata nel semispazio  $z \geq 0$ .

4. Calcolare  $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , con

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z^2 - x^2 - y^2 \leq 0, z \geq 0\}.$$

5. Calcolare  $\iiint_{\Omega} (x + y + z)^2 dx dy dz$ , con

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}.$$

6. Calcolare  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ , con

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz\}.$$

7. Calcolare il volume del corpo limitato dalla superficie

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}.$$

8. Calcolare il volume del corpo (situato nel semispazio  $z \geq 0$ ) limitato dalle superfici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

9. Calcolare il volume di  $\Omega$ , con

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0, x^2 + y^2 \leq x, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

10. Calcolare il volume di  $\Omega$ , con

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 3z, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

## Soluzioni

1.(a)  $\log 2$

1.(b)  $\frac{16}{5}$

1.(c)  $\frac{1}{2} \log \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$

2.  $\frac{5}{6}\pi$

3. La massa è data da  $M = \frac{2}{3}\pi R^3$

La coordinata  $x_G$  è data da  $x_G = 0$

La coordinata  $y_G$  è data da  $y_G = 0$

La coordinata  $z_G$  è data da  $z_G = \frac{3}{8}R$

4.  $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

5.  $\frac{\pi}{5}(18\sqrt{3} - 97/6)$

6.  $59\pi R^5/480$

7.  $\frac{\pi^2 abc}{4\sqrt{2}}$

8.  $\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2} - 1)abc$

9.  $(3\pi - 4)/9$

10.  $19\pi/6$