Esercitazione di martedì 1/12/2015

Gruppo M-Z

Integrazione: Applicazioni del teorema della media integrale e del teorema fondamentale del calcolo integrale. Aree e volumi di solidi di rotazione.

1. Sia f una funzione continua in $[-2, 2]$. Sapendo che $\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = 4$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   - $\int_{-2}^{2} xf(x)dx = 0$;
   - $\int_{-2}^{2} f^2(x)dx = 64$;
   - $\exists\ c \in [-2, 2]$ tale che $f(c) = 2$;
   - $\exists\ c \in [-2, 2]$ tale che $f(c) = 4$.

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione due volte derivabile. Sapendo che
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 \quad \text{e} \quad f'(x) > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R},$$
   quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   - f non ha massimo assoluto;
   - $f''(x) > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$;;
   - $\exists\ x_0$ tale che $f'(x_0) > \frac{2}{100}$;
   - $0 \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant 2$ per ogni coppia $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tale che $a < b$.

3. Calcolare la derivata di $\int_x^{3x^2} \sin t dt$.

4. Calcolare
$$\lim_{x\to1} \frac{\int_0^{\log x} \frac{1-e^{2t}}{\cos t} dt}{x^2 - 2x + 1}.$$

5. Disegnare il grafico vicino all'origine della funzione
$$f(x) = \int_0^x e^{t^2+3t} dt.$$

6. Calcolare l'area della regione del piano cartesiano compresa tra l'asse x ed il grafico di $f(x) = \sin(2x)$ per $x \in [0, \frac{3}{4}\pi]$.

7. Sia $R := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid cx^2 \leqslant y \leqslant ax^2 + b,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\right\}$, dove $y = cx^2$ è la parabola passante per $(0,0)$ e $(1,1)$ e $y = ax^2 + b$ è la parabola passante per $(1,1)$ e $(0,2)$. Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando R attorno all'asse y.

8. Sia K la regione interna ad $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\right\}$, contenuta nel semipiano $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\right\}$ e sopra la retta $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\}$. Calcolare l'area della regione K.

9. Sia $f(x) = (x^2 + \frac{2}{3})^{\frac{3}{2}}$ per $x \in [0,1]$.

   (a) Calcolare la lunghezza del grafico di f;

   (b) Calcolare l'area della superficie ottenuta ruotando il grafico di f attorno all'asse y.