Esercitazione di martedì 13/10/2015

Gruppo M-Z

Continuità: teorema di Weierstrass ed applicazioni.

Derivabilità: derivata di x^k (con $k \in \mathbb{N}$), derivate di funzioni polinomiali, studio della derivabilità di una funzione.

Esercizio 1. L'equazione $xe^x = 10$ ammette soluzioni reali? In caso affermativo, quante soluzioni ammette?

Esercizio 2. Dimostrare che ogni polinomio a coefficienti reali di grado dispari ammette almeno una radice reale.

Esercizio 3. Per quale funzione f l'equazione $f(x) = \operatorname{tg} x$ è certamente risolubile in $[0, \frac{\pi}{3}]$?

(a) $f(x) = \cos x + 2$;

(b) $f(x) = -x - \frac{1}{2}$;

(c) $f(x) = 3x - 1$;

(d) $f(x) = x^2 + 1$.

Esercizio 4. La funzione $g(x) = e^x - \sin x - 3x$ ammette zeri reali?

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\frac{x^2}{2} \leqslant f(x) \leqslant 2x^2 \quad \forall x \in [0, 1].$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) esiste $x_0 \in [0, 1]$ tale che $f(x_0) = \frac{7}{4}$;

(b) esiste $x_0 \in [0, 1]$ tale che $f(x_0) = \frac{3}{2}$;

(c) esiste $x_0 \in [0, 1]$ tale che $f(x_0) = 1$;

(d) esiste $x_0 \in [0, 1]$ tale che $f(x_0) = \frac{1}{2}$.

Esercizio 6. Derivare la funzione $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 1$.

Esercizio 7. Stabilire per quali valori $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è continua:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta & \text{se } x < 1; \\ 2\beta x^2 - \alpha x + 1 & \text{se } x \geqslant 1. \end{cases}$$