

Esercizi su massimi e minimi assoluti e moltiplicatori di Lagrange

1. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

nell'insieme

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}$$

2. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 5y^2 - \frac{xy}{2}$$

nell'insieme

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 4y^2 \leq 4\}$$

3. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = xy$$

nell'insieme

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

4. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y, z) = x - 2y + 2z$$

nell'insieme

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$$

5. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y, z) = xy^2z^3$$

nell'insieme

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 12, x > 0, y > 0, z > 0\}$$

6. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$$

nell'insieme

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$$

7. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$$

nell'insieme

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$$

dove $a > b > c > 0$.

8. Scomporre il numero positivo a in tre addendi non negativi in maniera tale che il loro prodotto sia massimo.
9. Se una corrente elettrica I scorre in un circuito elettrico di resistenza R , la quantità di calore emessa nell'unità di tempo è proporzionale a I^2R . Come si deve scomporre la corrente I in tre correnti I_1, I_2, I_3 con l'aiuto di tre conduttori di resistenza R_1, R_2, R_3 perchè la quantità di calore emesso sia minima?

Soluzioni

1. Il valore massimo di f è 6 e viene assunto nei punti $(0, -3)$ e $(-3, 0)$, mentre il valore minimo di f è -1 e viene assunto nel punto stazionario interno $(-1, -1)$.
2. Il minimo assoluto di f su A è 0 e viene assunto nel punto stazionario interno $(0, 0)$, mentre il massimo assoluto di f su A è $9/2 + \sqrt{2}/2$ e viene assunto nei due punti del bordo $(2 \cos(5\pi/8), \sin(5\pi/8))$ e in $(2 \cos(13\pi/8), \sin(13\pi/8))$
3. Il valore minimo è 0 e viene assunto in $(0,1)$ e in $(1,0)$, mentre il valore massimo è $1/4$ e viene assunto in $(1/2, 1/2)$.
4. 9 è il valore massimo e viene assunto in $(1,-2,2)$ e -9 è il valore minimo e viene assunto in $(-1,2,-2)$.
5. Il valore massimo si assume in $(2, 4, 6)$ e vale $2 \cdot 4^2 \cdot 6^3$, mentre il minimo si ottiene per $x=0$ o per $y=0$ o per $z=0$ e vale 0.
6. Il valore massimo è $3\sqrt{3}/2$ e viene assunto nei punti $(a, 0, 0)$ e $(-a, 0, 0)$, mentre il minimo è c e viene assunto nei punti $(0,0,c)$ e $(0,0,-c)$.
7. Il valore massimo è a e viene assunto nel punto interno $(\pi/3, \pi/3)$, mentre il minimo è 0 e viene assunto nel punto $(0,0)$.
8. $x = y = z = a/3$ e $f(a/3, a/3, a/3) = a^3/27$

9.

$$I_1 = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} I,$$

$$I_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} I,$$

$$I_3 = \frac{R_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} I$$