ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia	10 gennaio 2017

1. (6 punti) Sia $b > 0$. Sia $V(b)$ il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando attorno all'asse x la regione $B = \left\{(x,y) \,|\, 0 \le x \le \sqrt{b}, 0 \le y \le \sqrt{2x(b+x^2)\arctan(b+x^2)}\right\}$. Si calcoli $\lim_{b\to 0^+} \frac{V(b)}{b^3}$.

La formula per i solidi di rotazione attorno all'asse x è:

$$V(b) = \int_0^{\sqrt{b}} \pi f(x)^2 dx = \int_0^{\sqrt{b}} \pi\, 2x(b+x^2)\arctan(b+x^2)\,dx.$$

Ponendo $b+x^2 = t$, $2x\,dx = dt$, $x=0 \to t=b$, $x=\sqrt{b} \to t=2b$, si ha

$$V(b) = \int_b^{2b} \pi\, t \,\text{arctg}\, t\, dt \overset{\text{per parti}}{=} \pi\left[\frac{t^2}{2}\text{arctg}\, t\Big|_b^{2b} - \int_b^{2b} \frac{t^2}{2}\frac{1}{1+t^2}dt\right] =$$

$$= \pi\left[2b^2\,\text{arctg}(2b) - \frac{b^2}{2}\text{arctg}\, b - \frac{1}{2}\int_b^{2b}\frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt\right] =$$

$$= \pi\left[2b^2\,\text{arctg}(2b) - \frac{b^2}{2}\text{arctg}\, b - \frac{1}{2}(2b-b) + \frac{1}{2}\text{arctg}\, t\Big|_b^{2b}\right] =$$

$$= \pi\left[2b^2\,\text{arctg}(2b) - \frac{b^2}{2}\text{arctg}\, b - \frac{b}{2} + \frac{1}{2}\text{arctg}(2b) - \frac{1}{2}\text{arctg}\, b\right].$$

Sviluppando con Taylor

$$\text{arctg}(2b) = 2b - \frac{(2b)^3}{3} + o(b^3), \quad \text{arctg}\, b = b - \frac{b^3}{3} + o(b^3),$$

dunque

$$\lim_{b\to 0^+}\frac{V(b)}{b^3} = \pi \lim_{b\to0^+}\frac{1}{b^3}\Big[2b^2(2b+o(b)) - \frac{b^2}{2}(b+o(b)) - \frac{b}{2} + \frac{1}{2}\Big(2b - \frac{8b^3}{3} + o(b^3)\Big) - \frac{1}{2}\Big(b - \frac{b^3}{3} + o(b^3)\Big)\Big] =$$

$$= \pi \lim_{b\to0^+}\frac{1}{b^3}\left[4b^3 + o(b^3) - \frac{b^3}{2} - \cancel{\frac{b}{2}} + \cancel{b} - \frac{4}{3}b^3 - \cancel{\frac{1}{2}b} + \frac{b^3}{6}\right] = \frac{7}{3}\pi.$$

[Visto che si chiedeva il limite, si sarebbe anche potuto applicare l'Hôpital (si ha $V(b) \xrightarrow[b\to0^+]{} 0$ ...):

$$\lim_{b\to0^+}\frac{V(b)}{b^3} = \lim_{b\to0^+}\frac{V'(b)}{3b^2} = \lim_{b\to0^+}\frac{\frac{d}{db}\left[\int_b^{2b}\pi t\,\text{arctg}\, t\,dt\right]}{3b^2} =$$

$$= \pi\lim_{b\to0^+}\frac{1}{3b^2}\left[4b\,\text{arctg}(2b) - b\,\text{arctg}\, b\right] = \pi\lim_{b\to0^+}\frac{1}{3b^2}\left(8b^2 + o(b^2) - b^2\right) = \frac{7}{3}\pi.]$$

c'è un fattore 2 che deriva dalla derivata dell'estremo 2b...

ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia	10 gennaio 2017

2. **(6 punti)** Si determini l'insieme dei valori del parametro reale $x \neq -2$ per cui la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2^n}{n^2+3^n} \left(\frac{\frac{1}{2}+x^2}{2+x} \right)^n$$

è convergente.

Scrivendo $t = \dfrac{1/2+x^2}{2+x}$ otteniamo la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2^n}{n^2+3^n} t^n$.

Il raggio di convergenza si ottiene da $r = 1/L$, ove

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|n+1-2^{n+1}|}{(n+1)^2+3^{n+1}} \cdot \frac{n^2+3^n}{|n-2^n|} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{3^n}(n^2/3^n+1)}{3^{\cancel{n+1}}((n+1)^2/3^{n+1}+1)} \cdot \frac{2^{\cancel{n+1}}\,|{}^{n+1}/_{2^{n+1}}-1|}{\cancel{2^n}\,|{}^{n}/_{2^n}-1|} = \frac{2}{3}.$$

$\frac{n^2}{3^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ poiché gli esponenziali tendono all'infinito più rapidamente dei polinomi... Stessa cosa per $n/2^n$...

Dunque c'è convergenza della serie per $\dfrac{1/2+x^2}{|2+x|} < 3/2$.

Questo dà, per $x+2>0$, $1/2+x^2 < \frac{3}{2}x+3$, cioè $2x^2-3x-5<0$. Le radici di $2x^2-3x-5$ sono $x = \dfrac{3 \mp \sqrt{9+4\cdot 2\cdot 5}}{4} = \dfrac{3\mp\sqrt{49}}{4} = \begin{cases} -1 \\ 5/2 \end{cases}$, entrambe >-2.

Dunque la serie converge per

$$-1 < x < 5/2.$$

Per $x+2<0$, si deve risolvere $1/2+x^2 < -3/2\,x-3$, cioè $2x^2+3x+7<0$, che non ha soluzione (non ci sono radici reali).

Per $x<-1$ la serie non converge, per $x>5/2$ la serie non converge (perché $|t| = \dfrac{1/2+x^2}{|2+x|} > 3/2$).

Per $x=-1$ la serie diventa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2^n}{n^2+3^n}\left(\frac{3}{2}\right)^n$, e non converge perché $\frac{n-2^n}{n^2+3^n}\frac{3^n}{2^n} \not\to 0$ (converge a -1).

Per $x=5/2$ la serie diventa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2^n}{n^2+3^n}\left(\frac{3}{2}\right)^n$, e non converge per quanto appena visto.

ANALISI MATEMATICA 1 - Seconda prova intermedia	10 gennaio 2017

3. **(6 punti)** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{4-x^2}\,\dfrac{1}{e^{2y}-e^y} \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

È un'equazione differenziale del 1° ordine, nonlineare, a variabili separabili. Si ha

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4-x^2}\,\frac{1}{e^{2y}-e^y} \longrightarrow (e^{2y}-e^y)\,dy = \frac{1}{4-x^2}\,dx\,.$$

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \ldots \quad B=-1/4 \quad A=1/4$$

Integrando si ottiene:

$$\frac{1}{2}e^{2y} - e^y = \int (e^{2y}-e^y)\,dy = \int \frac{1}{4-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\log|2+x| - \frac{1}{4}\log|2-x| + c\,.$$

Imponendo il dato di Cauchy si ha:

$$\frac{1}{2}e^2 - e = \frac{1}{4}\cancel{\log 2} - \frac{1}{4}\cancel{\log 2} + c \longrightarrow c = \frac{1}{2}e^2 - e\,.$$

Dunque abbiamo

$$e^{2y} - 2e^y = \frac{1}{2}\log\frac{|2+x|}{|2-x|} + e^2 - 2e \overset{\text{per } x \text{ vicino a } 0}{=} \frac{1}{2}\log\frac{2+x}{2-x} + e^2 - 2e\,.$$

Ponendo $w = e^y$, si deve risolvere

$$w^2 - 2w - \frac{1}{2}\log\frac{2+x}{2-x} - e^2 + 2e = 0 \longrightarrow w = 1 \mp \sqrt{1 + \frac{1}{2}\log\frac{2+x}{2-x} + e^2 - 2e}\,.$$

Il dato di Cauchy ci dice che $w(0) = e^{y(0)} = e$, dunque si deve scegliere la radice positiva (per $x=0$ la radice diventa $\sqrt{1+e^2-2e} = \sqrt{(e-1)^2} = e-1 \ldots$).

In conclusione,

$$y(x) = \log w(x) = \log\left(1 + \sqrt{e^2 - 2e + 1 + \tfrac{1}{2}\log\frac{2+x}{2-x}}\right).$$