COGNOME | | NOME | | Matr. | |

Analisi Matematica II (EA)

11 gennaio 2012

Esercizio 1 (7 punti)

Sia $\boldsymbol{\alpha}$ la curva costituita dall'unione della circonferenza di centro $(0,0,0)$ e raggio 2 (contenuta nel piano $\{z=0\}$ e percorsa in senso antiorario) e del segmento verticale congiungente il punto iniziale $(2,0,0)$ con il punto finale $(2,0,-2)$. Si calcoli l'integrale curvilineo di $\mathbf{v}=(x+z, y+z, x-y)$ lungo la curva $\boldsymbol{\alpha}$.

Risultato: $\int_\alpha \vec{v}\cdot d\vec{\ell} = -4.$

Calcoli:

Una parametrizzazione della circonferenza è $x=2\cos\theta$, $y=2\operatorname{sen}\theta$, $z=0$, con $\theta\in[0,2\pi]$. Dunque l'integrale sul primo pezzo di curva è

$$\int_0^{2\pi}(2\cos\theta+0, 2\operatorname{sen}\theta+0, 2\cos\theta-2\operatorname{sen}\theta)\cdot(-2\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta, 0)\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}(-4\operatorname{sen}\theta\cos\theta+4\cos\theta\operatorname{sen}\theta)\,d\theta = 0.$$

Una parametrizzazione del segmento è $x=2$, $y=0$, $z=t$, con $t\in[-2,0]$. Questa parametrizzazione dà però un verso di percorrenza opposto a quello richiesto, dunque il risultato dovrà essere cambiato di segno. Si ha

$$\int_{-2}^{0}(2+t, 0+t, 2-0)\cdot(0,0,1)\,dt = \int_{-2}^{0}2\,dt = 4.$$

Il risultato è dunque $0+(-4)=-4.$

$\boxed{*}$ **Nota:** per $(x,y) \neq (0,0)$ si ha $x^2+y^2>0$, dunque $(x^2+y^2)^{-\beta}$ è di classe C^1 nell'intorno di ogni punto $(x,y)\neq(0,0)$. Siccome x^4-xy+y^4 è un polinomio, lo stesso vale per $f(x,y)$. Le due domande sono dunque significative solo per $(x,y)=(0,0)$.

Esercizio 2 (7 punti)

Sia $\beta > 0$ e sia f la funzione definita da

$$\boxed{*}\quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - xy + y^4}{(x^2+y^2)^\beta} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Determinare qual è l'insieme dei valori di $\beta > 0$ per cui f è continua in $\mathbf{R}^2$.

(ii) Determinare qual è l'insieme dei valori di $\beta > 0$ per cui f è differenziabile in $\mathbf{R}^2$.

Risultati: $0<\beta<1$. | $0<\beta<1/2$.

Calcoli:

(i) Bisogna verificare per quali $\beta>0$ si ha $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-xy+y^4}{(x^2+y^2)^\beta} = f(0,0) = 0$.

In coordinate polari si ha

$$\left| \frac{\rho^4\cos^4\theta - \rho^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + \rho^4\,\mathrm{sen}^4\theta}{\rho^{2\beta}} - 0 \right| = \rho^{2-2\beta}\left|\rho^2\cos^4\theta - \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + \rho^2\,\mathrm{sen}^4\theta\right| \leq$$

$$\leq \rho^{2-2\beta}(2\rho^2+1) \xrightarrow[\rho\to0^+]{} 0 \quad \text{se } 2-2\beta>0, \text{ cioè } \beta<1.$$

Se invece $\beta\geq1$, valutando $f(x,y)$ per $x=y$ si ha

$$f(x,x) = \frac{2x^4-x^2}{(2x^2)^\beta} = \frac{2x^2-1}{2^\beta (x^2)^{\beta-1}} \begin{cases} \nearrow -1/2 & \text{se } \beta=1 \\ \searrow -\infty & \text{se } \beta>1 \end{cases} \quad \text{per } x\to0.$$

Dunque f è continua per $0<\beta<1$ e <u>non</u> lo è per $\beta\geq1$.

(ii) Cominciamo a calcolare $\nabla f(0,0)$. Si ha

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{h^4}{h^{2\beta}} = 0 \text{ per } \beta<1$$ (per $\beta\geq1$ f non è continua, dunque non è differenziabile).

$$\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to0}\frac{k^4}{k^{2\beta}} = 0 \text{ per } \beta<1.$$ Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Si tratta così di verificare per quali $\beta>0$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^{1/2}} = 0.$$

In coordinate polari si ha:

$$\left|\frac{\rho^4\cos^4\theta - \rho^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + \rho^4\,\mathrm{sen}^4\theta}{\rho^{2\beta}\cdot\rho} - 0\right| \leq \rho^{2-2\beta-1}(2\rho^2+1) \xrightarrow[\rho\to0^+]{} 0 \quad \text{se } \beta<1/2.$$

Per $\beta\geq1/2$, valutando $f(x,y)/(x^2+y^2)^{1/2}$ per $x=y$ si ha

$$\frac{f(x,x)}{\sqrt{2x^2}} = \frac{2x^2-1}{2^{\beta+1/2}(x^2)^{\beta-1+1/2}} = \frac{2x^2-1}{2^{\beta+1/2}(x^2)^{\beta-1/2}} \underset{x\to0}{\not\to} 0.$$

Dunque f è differenziabile per $0<\beta<1/2$ e <u>non</u> lo è per $\beta\geq1/2$.

Esercizio 3 (8 punti)
Sia S la superficie

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, (x,y) \in T\,, z = 2 + xy - x^2 - y^2\}\,,$$

ove T è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$. Si determinino il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $G(x,y,z) = 3x - y + z$ sulla superficie S.

Risultato: $\boxed{\max_S G = 17/4 \quad , \quad \min_S G = 0\,.}$

Calcoli:

La funzione G sulla superficie S vale (su S si ha $z = 2+xy-x^2-y^2$...)

$$q(x,y) = 3x-y+(2+xy-x^2-y^2) = 2+3x-y+xy-x^2-y^2, \quad (x,y)\in T.$$

- Facendo il gradiente si ottiene $\frac{\partial q}{\partial x} = 3+y-2x$, $\frac{\partial q}{\partial y} = -1+x-2y$; uguagliando a 0 le due derivate si trova

$$\begin{cases} 3+y-2x=0 & \to y = 2x-3 \\ -1+x-2y=0 & -1+x-2(2x-3)=0 \to -3x+5=0 \to x = 5/3 \end{cases}$$

$$y = 2x-3 = \frac{10}{3}-3 = 1/3.$$

Il punto $(5/3, 1/3)$ è però fuori di T, dato che in T si ha $y < -x/2+1$, mentre $1/3 > -5/6+1 = 1/6$. [$y=-x/2+1$ è la retta che passa per $(2,0)$ e $(0,1)$.]

- Vediamo ora sui lati di T : sono dati da $x=0$, $y\in[0,1]$; $y=0$, $x\in[0,2]$; $x=x$, $y=-x/2+1$, $x\in[0,2]$. I vertici sono $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$.

Per $x=0$ si ha $q(0,y) = 2-y-y^2$ e $\frac{dq(0,y)}{dy} = -1-2y = 0$ per $y = -1/2 \notin [0,1]$.

Per $y=0$ si ha $q(x,0) = 2+3x-x^2$ e $\frac{dq(x,0)}{dx} = 3-2x = 0$ per $x = 3/2 \in [0,2]$.

Per $y=-x/2+1$ si ha $q(x,-x/2+1) = 2+3x+x/2-1+x(-x/2+1)-x^2-(-x/2+1)^2 =$
$= -7/4\, x^2 + 11/2\, x = 0$ per $x=0$ e $x = 22/7 \notin [0,2]$.

- Confrontiamo ora i valori : $q(3/2,0) = 17/4$, $q(0,0)=2$, $q(2,0)=4$, $q(0,1)=0$. Dunque il massimo assoluto è $17/4$, il minimo assoluto è 0.

Con i moltiplicatori di Lagrange si deve azzerare il gradiente di $\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = 3x-y+z-\lambda(2+xy-x^2-y^2-z)$, il che dà:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 3-\lambda(y-2x) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -1-\lambda(x-2y) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 1+\lambda = 0 \to \lambda = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3+y-2x=0 \\ -1+x-2y=0 \to x = 1+2y \end{cases}$$

$$3+y-2-4y=0 \to y = 1/3, \qquad x = 1+2y = 1+2\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{3},$$

ma $(5/3, 1/3) \notin T$. Da qui in avanti si prosegue come prima...

Esercizio 4 (8 punti)

Nel piano (x, z) sia γ la curva di parametrizzazione $x = r(\psi)\cos\psi$, $z = r(\psi)\sin\psi$, con $\psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $r(\psi) = \cos\psi$, e sia D la regione contenuta all'interno del sostegno di γ. Si calcoli il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando l'insieme D attorno all'asse z.

[Suggerimento: utilizzare le coordinate sferiche, o qualche variante opportuna...]

Risultato: $\boxed{V = \pi^2/4 .}$

Calcoli:

Le coordinate sferiche sono: $x = r \operatorname{sen}\varphi\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta$, $z = r\cos\varphi$, con $\varphi \in [0,\pi]$ angolo di "co-latitudine" e $\theta \in [0, 2\pi]$ angolo di "longitudine".

Nel piano (x,z) l'angolo ψ è invece l'angolo di "latitudine", cioè $\varphi = \pi/2 - \psi$. Dunque la limitazione di r è data da $0 \le r \le \cos\psi = \operatorname{sen}\varphi$.

Quindi il volume richiesto è (lo jacobiano è $r^2 \sin\varphi$):

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\operatorname{sen}\varphi} r^2 \sin\varphi \, dr = 2\pi \int_0^{\pi} \frac{\sin^3\varphi}{3} \sin\varphi \, d\varphi = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} \sin^4\varphi \, d\varphi .$$

Si ha:

$$\int_0^{\pi} \sin^4\varphi \, d\varphi = \int_0^{\pi} (1-\cos^2\varphi)\sin^2\varphi \, d\varphi = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi - \int_0^{\pi} \cos\varphi(\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi)\, d\varphi ;$$

$$\int_0^{\pi} \cos\varphi(\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi)\, d\varphi \underset{\text{per parti}}{=} \frac{\operatorname{sen}^3\varphi}{3}\cos\varphi \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4\varphi \, d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \sin^4\varphi \, d\varphi .$$

Dunque

$$\frac{4}{3}\int_0^{\pi} \sin^4\varphi \, d\varphi = \int_0^{\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi = \pi/2 \Rightarrow \int_0^{\pi} \sin^4\varphi \, d\varphi = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow V = \pi^2/4 .$$

Operando "da ingegneri", in D abbiamo per ogni punto (x,z) un'area $dx\,dz$, che percorre la circonferenza di lunghezza $2\pi x$ (x è la distanza dall'asse di rotazione). Dunque il volume V è la "somma" di tanti volumetti $2\pi x \, dx \, dz$, cioè:

$$V = \iint_D 2\pi x \, dx\, dz \underset{\substack{x = r\cos\psi \\ z = r\operatorname{sen}\psi}}{=} 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \int_0^{\cos\psi} r\cos\psi \, r\, dr = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\psi \frac{\cos^3\psi}{3} d\psi = \frac{2\pi}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\psi \, d\psi \underset{\varphi = \pi/2 - \psi}{=} \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4\varphi \, d\varphi = \pi^2/4 .$$

Che insieme è D? Vediamo la curva γ che lo delimita. Si ha $x = \cos^2\psi$, $z = \cos\psi \operatorname{sen}\psi$, per cui $z^2 = \cos^2\psi \operatorname{sen}^2\psi = \cos^2\psi(1-\cos^2\psi) = x(1-x)$, dunque

$$z^2 = x(1-x) \Leftrightarrow z^2 + x^2 - x = 0 \Leftrightarrow z^2 + (x - 1/2)^2 - 1/4 = 0 ,$$

la circonferenza di centro $(1/2, 0)$ e raggio $1/2$. Dunque D ha area $\pi/4$, e il suo baricentro $(1/2, 0)$ ruota per una lunghezza $2\pi \cdot 1/2 = \pi$.

Il volume è dunque $\pi/4 \cdot \pi = \pi^2/4$.