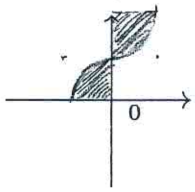
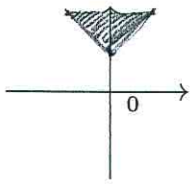
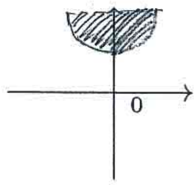
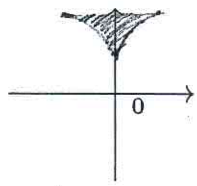
ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello		**11 febbraio 2013**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Corso di laurea:		Test | Es1 | Es2 | Es3 |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. In quale area tratteggiata è compreso il grafico della soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = e^y + 3x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ per $x \in [-1, 1]$?

[X] a  ; b  ; c  ; d  .

2. Siano $g(y) = y - \frac{1}{y}$ e $f(x) = x^3 + 1$. La retta normale al grafico della funzione $(g \circ f)(x)$ nel punto $(1, (g \circ f)(1))$ è: a $y = \frac{1}{6}x + \frac{5}{6}$; b $y = \frac{2}{5}x - \frac{19}{10}$; [X] c $y = -\frac{4}{15}x + \frac{53}{30}$; d $y = -\frac{1}{8}x - \frac{7}{8}$.

3. Sia $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ derivabile, monotona e tale che $f(-1)f(1) < 0$. Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? [X] a anche $|f(x)|$ può essere sempre derivabile in $[-1, 1]$; b $|f(x)|$ è continua e mai derivabile in $[-1, 1]$; c $f(0) = 0$; d Se $g(x) = f(x^3)$ allora $g'(x) > 0$ in $[-1, 1]$.

4. L'insieme $\{z \in \mathbf{C} \ : |\frac{z+i}{z-i}| = 1\}$ è: a il bordo di un quadrato; b una circonferenza; c l'asse immaginario; [X] d l'asse reale.

5. Indicate quale dei seguenti integrali impropri è convergente. a $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\log x}{(|x-1| \log(1+\sqrt{x}))^2}\, dx$ [X] b $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\log x}{|x-1|^5 (\sin x)^{1/2}}\, dx$; c $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\log x}{|x-1|^3 \log(1+x)}\, dx$; d $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\log x}{|x-1| \log(1+x)}\, dx$.

6. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $x \le f(x) \le 3x$ per $x \ge 0$. Quale delle seguenti equazioni ha certamente almeno una soluzione in $[0, +\infty)$? [X] a $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$; b $f(x) = x + 1$; c $f(x) = 3x - 1$; d $f(x) = e^x + \frac{1}{3}$.

7. La funzione $f(x) = x^\alpha \left(1 - \cos(\frac{1}{x^2})\right)$ ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ se $\alpha =$ a -4; [X] b 5; c -5; d 4.

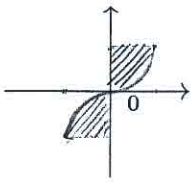
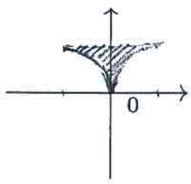
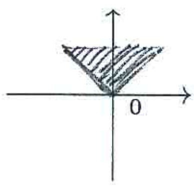
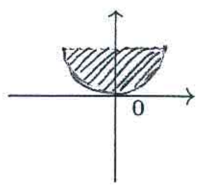
8. L'insieme degli $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n^\alpha + n^{-\alpha}}$ converge è: [X] a $\alpha < -4$ e $4 < \alpha$; b $-3 < \alpha < 3$; c $-4 < \alpha < 4$; d $\alpha < -3$ e $3 < \alpha$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello		11 febbraio 2013
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Corso di laurea:		Test | Es1 | Es2 | Es3 |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. L'insieme degli $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5}{n^\alpha + n^{-\alpha}}$ converge è: $\boxed{a}$ $-6 < \alpha < 6$; $\boxed{b}$ $\alpha < -5$ e $5 < \alpha$; $\boxtimes$ $\alpha < -6$ e $6 < \alpha$; $\boxed{d}$ $-5 < \alpha < 5$.

2. In quale area tratteggiata è compreso il grafico della soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 3x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ per $x \in [-1, 1]$?

$\boxtimes$  ; $\boxed{b}$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxed{d}$  .

3. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $x \leq f(x) \leq 5x$ per $x \geq 0$. Quale delle seguenti equazioni ha certamente almeno una soluzione in $[0, +\infty)$? $\boxed{a}$ $f(x) = 5x - 1$; $\boxed{b}$ $f(x) = e^x + \frac{1}{5}$; $\boxtimes$ $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$; $\boxed{d}$ $f(x) = x + 1$.

4. Siano $g(y) = \frac{1}{y} - y$ e $f(x) = x^2 + 1$. La retta normale al grafico della funzione $(g \circ f)(x)$ nel punto $(1, (g \circ f)(1))$ è: $\boxed{a}$ $y = -\frac{4}{15}x + \frac{53}{30}$; $\boxed{b}$ $y = -\frac{1}{8}x - \frac{7}{8}$; $\boxed{c}$ $y = \frac{1}{6}x + \frac{5}{6}$; $\boxtimes$ $y = \frac{2}{5}x - \frac{19}{10}$.

5. La funzione $f(x) = x^\alpha \left(1 - \cos(\frac{1}{\sqrt{x^3}})\right)$ ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ se $\alpha =$ $\boxed{a}$ -4; $\boxed{b}$ 3; $\boxed{c}$ -3; $\boxtimes$ 4.

6. Indicate quale dei seguenti integrali impropri è convergente. $\boxed{a}$ $\int_0^{1/2} \frac{\log x}{|x-1|^3 \log(1+x)}\,dx$; $\boxed{b}$ $\int_0^{1/2} \frac{\log x}{|x-1| \log(1+x)}\,dx$; $\boxed{c}$ $\int_0^{1/2} \frac{\log x}{(|x-1| \log(1+\sqrt{x}))^2}\,dx$; $\boxtimes$ $\int_0^{1/2} \frac{\log x}{|x-1|^5 (\sin x)^{1/2}}\,dx$

7. Sia $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ derivabile, monotona e tale che $f(-1)f(1) < 0$. Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxed{a}$ $f(0) = 0$; $\boxed{b}$ Se $g(x) = f(x^3)$ allora $g'(x) > 0$ in $[-1, 1]$; $\boxtimes$ anche $|f(x)|$ può essere sempre derivabile in $[-1, 1]$; $\boxed{d}$ $|f(x)|$ è continua e mai derivabile in $[-1, 1]$.

8. L'insieme $\{z \in \mathbf{C} : |\frac{z+i}{z-i}| = 1\}$ è: $\boxed{a}$ l'asse immaginario; $\boxtimes$ l'asse reale; $\boxed{c}$ il bordo di un quadrato; $\boxed{d}$ una circonferenza.

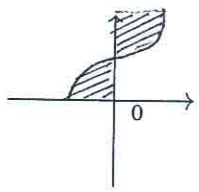
ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello		11 febbraio 2013
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Corso di laurea:		Test | Es1 | Es2 | Es3 |

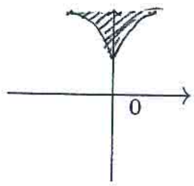
- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta: +1.5. Risposta errata: −0.25.*

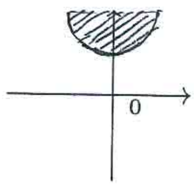
1. La funzione $f(x) = x^\alpha \left(1 - \cos(\frac{1}{\sqrt{x}})\right)$ ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ se $\alpha =$ ☒ 2; $\boxed{b}$ −2; $\boxed{c}$ 1; $\boxed{d}$ −1.

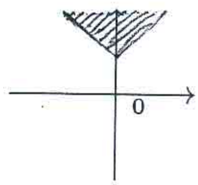
2. Indicate quale dei seguenti integrali impropri è convergente. ☒ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\log x}{|x-1|^5 (\sin x^2)^{1/3}}\,dx$; $\boxed{b}$ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\log x}{|x-1|^3 \sin x}\,dx$; $\boxed{c}$ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\log x}{|x-1| \sin x}\,dx$; $\boxed{d}$ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\log x}{(|x-1| \sin \sqrt{x})^2}\,dx$.

3. In quale area tratteggiata è compreso il grafico della soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = e^y + 3x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ per $x \in [-1,1]$?

☒ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

4. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $x \le f(x) \le 4x$ per $x \ge 0$. Quale delle seguenti equazioni ha certamente almeno una soluzione in $[0, +\infty)$? $\boxed{a}$ $f(x) = x + 1$; $\boxed{b}$ $f(x) = 4x - 1$; $\boxed{c}$ $f(x) = e^x + \frac{1}{4}$; ☒ $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$.

5. L'insieme $\{z \in \mathbf{C} \ : \ |\frac{z+1}{z-1}| = 1\}$ è: $\boxed{a}$ una circonferenza; ☒ l'asse immaginario; $\boxed{c}$ l'asse reale; $\boxed{d}$ il bordo di un quadrato.

6. L'insieme degli $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{n^\alpha + n^{-\alpha}}$ converge è: $\boxed{a}$ $-4 < \alpha < 4$; $\boxed{b}$ $-5 < \alpha < 5$; $\boxed{c}$ $\alpha < -4$ e $4 < \alpha$; ☒ $\alpha < -5$ e $5 < \alpha$.

7. Siano $g(y) = \frac{1}{y^2} - 2y$ e $f(x) = 2 - x^2$. La retta normale al grafico della funzione $(g \circ f)(x)$ nel punto $(1, (g \circ f)(1))$ è: $\boxed{a}$ $y = \frac{2}{5}x - \frac{19}{10}$; $\boxed{b}$ $y = -\frac{4}{15}x + \frac{53}{30}$; ☒ $y = -\frac{1}{8}x - \frac{7}{8}$; $\boxed{d}$ $y = \frac{1}{6}x + \frac{5}{6}$.

8. Sia $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$ derivabile, monotona e tale che $f(-1)f(1) > 0$. Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxed{a}$ $|f(x)|$ è continua e mai derivabile in $[-1,1]$; $\boxed{b}$ $f(x) = |f(x)|$ in $[-1,1]$; $\boxed{c}$ Se $g(x) = f(x^3)$ allora $g'(x) > 0$ in $[-1,1]$; ☒ $|f(x)|$ è sempre derivabile in $[-1,1]$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello		11 febbraio 2013
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Corso di laurea:		Test | Es1 | Es2 | Es3 |

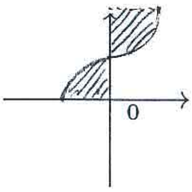
- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta: +1.5. Risposta errata: −0.25.*

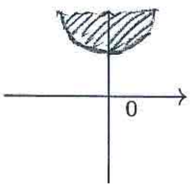
1. L'insieme $\{z \in \mathbf{C} \ : |Re\, z| + |Im\, z| = 1\}$ è: $\boxed{a}$ il bordo di un quadrato; $\boxed{b}$ una circonferenza; $\boxed{c}$ l'asse immaginario; $\boxed{d}$ l'asse reale.

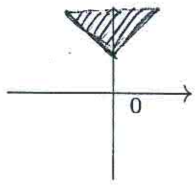
2. L'insieme degli $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n^\alpha + n^{-\alpha}}$ converge è: $\boxed{a}$ $\alpha < -4$ e $4 < \alpha$; $\boxed{b}$ $-3 < \alpha < 3$; $\boxed{c}$ $-4 < \alpha < 4$; $\boxed{d}$ $\alpha < -3$ e $3 < \alpha$.

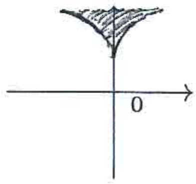
3. Indicate quale dei seguenti integrali impropri è convergente. $\boxed{a}$ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\log x}{(|x-1|\log(1+\sqrt{x}))^2}\,dx$ $\boxed{b}$ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\log x}{|x-1|^5(\sin x)^{1/2}}\,dx$; $\boxed{c}$ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\log x}{|x-1|^3\log(1+x)}\,dx$; $\boxed{d}$ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\log x}{|x-1|\log(1+x)}\,dx$.

4. In quale area tratteggiata è compreso il grafico della soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 3x^2 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ per $x \in [-1, 1]$?

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

5. Sia $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ derivabile, monotona e tale che $f(-1)f(1) < 0$. Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxed{a}$ anche $|f(x)|$ può essere sempre derivabile in $[-1, 1]$; $\boxed{b}$ $|f(x)|$ è continua e mai derivabile in $[-1, 1]$; $\boxed{c}$ $f(0) = 0$; $\boxed{d}$ Se $g(x) = f(x^3)$ allora $g'(x) > 0$ in $[-1, 1]$.

6. La funzione $f(x) = x^\alpha\left(1 - \cos(\frac{1}{x^2})\right)$ ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ se $\alpha =$ $\boxed{a}$ -4; $\boxed{b}$ 5; $\boxed{c}$ -5; $\boxed{d}$ 4.

7. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $x \le f(x) \le 3x$ per $x \ge 0$. Quale delle seguenti equazioni ha certamente almeno una soluzione in $[0, +\infty)$? $\boxed{a}$ $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$; $\boxed{b}$ $f(x) = x + 1$; $\boxed{c}$ $f(x) = 3x - 1$; $\boxed{d}$ $f(x) = e^x + \frac{1}{3}$.

8. Siano $g(y) = y - \frac{1}{y}$ e $f(x) = x^3 + 1$. La retta normale al grafico della funzione $(g \circ f)(x)$ nel punto $(1, (g \circ f)(1))$ è: $\boxed{a}$ $y = \frac{1}{6}x + \frac{5}{6}$; $\boxed{b}$ $y = \frac{2}{5}x - \frac{19}{10}$; $\boxed{c}$ $y = -\frac{4}{15}x + \frac{53}{30}$; $\boxed{d}$ $y = -\frac{1}{8}x - \frac{7}{8}$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello		11 febbraio 2013
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Corso di laurea:		Test | Es1 | Es2 | Es3 |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

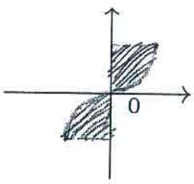
1. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $x \le f(x) \le 4x$ per $x \ge 0$. Quale delle seguenti equazioni ha certamente almeno una soluzione in $[0, +\infty)$? $\boxed{a}$ $f(x) = x + 1$; $\boxed{b}$ $f(x) = 4x - 1$; $\boxed{c}$ $f(x) = e^x + \frac{1}{4}$; $\boxed{\times}$ $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$.

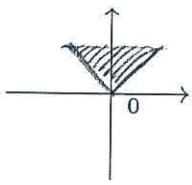
2. Sia $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ derivabile, monotona e tale che $f(-1)f(1) > 0$. Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxed{a}$ $|f(x)|$ è continua e mai derivabile in $[-1, 1]$; $\boxed{b}$ $f(x) = |f(x)|$ in $[-1, 1]$; $\boxed{c}$ Se $g(x) = f(x^3)$ allora $g'(x) > 0$ in $[-1, 1]$; $\boxed{\times}$ $|f(x)|$ è sempre derivabile in $[-1, 1]$.

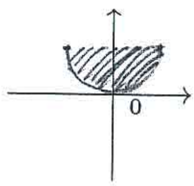
3. L'insieme $\{z \in \mathbf{C} \ : |Re\, z| + |Im\, z| = 1\}$ è: $\boxed{a}$ una circonferenza; $\boxed{b}$ l'asse immaginario; $\boxed{c}$ l'asse reale; $\boxed{\times}$ il bordo di un quadrato.

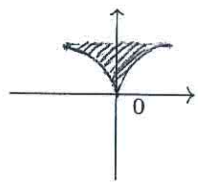
4. La funzione $f(x) = x^\alpha \left(1 - \cos(\frac{1}{\sqrt{x}})\right)$ ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ se $\alpha =$ $\boxed{\times}$ 2; $\boxed{b}$ −2; $\boxed{c}$ 1; $\boxed{d}$ −1.

5. In quale area tratteggiata è compreso il grafico della soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 3x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ per $x \in [-1, 1]$?

$\boxed{\times}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

6. Siano $g(y) = \frac{1}{y^2} - 2y$ e $f(x) = 2 - x^2$. La retta normale al grafico della funzione $(g \circ f)(x)$ nel punto $(1, (g \circ f)(1))$ è: $\boxed{a}$ $y = \frac{2}{5}x - \frac{19}{10}$; $\boxed{b}$ $y = -\frac{4}{15}x + \frac{53}{30}$; $\boxed{\times}$ $y = -\frac{1}{8}x - \frac{7}{8}$; $\boxed{d}$ $y = \frac{1}{6}x + \frac{5}{6}$.

7. L'insieme degli $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{n^\alpha + n^{-\alpha}}$ converge è: $\boxed{a}$ $-4 < \alpha < 4$; $\boxed{b}$ $-5 < \alpha < 5$; $\boxed{c}$ $\alpha < -4$ e $4 < \alpha$; $\boxed{\times}$ $\alpha < -5$ e $5 < \alpha$.

8. Indicate quale dei seguenti integrali impropri è convergente. $\boxed{\times}$ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\log x}{|x-1|^5 (\sin x^2)^{1/3}}\, dx$; $\boxed{b}$ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\log x}{|x-1|^3 \sin x}\, dx$; $\boxed{c}$ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\log x}{|x-1| \sin x}\, dx$; $\boxed{d}$ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\log x}{(|x-1| \sin \sqrt{x})^2}\, dx$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello		11 febbraio 2013
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Corso di laurea:		Test |Es1 |Es2 |Es3 |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. Indicate quale dei seguenti integrali impropri è convergente. $\boxed{a}$ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\log x}{|x-1|\sin x}\,dx$; $\boxed{b}$ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\log x}{(|x-1|\sin\sqrt{x})^2}\,dx$; $\boxtimes$ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\log x}{|x-1|^5(\sin x^2)^{1/3}}\,dx$; $\boxed{d}$ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\log x}{|x-1|^3\sin x}\,dx$.

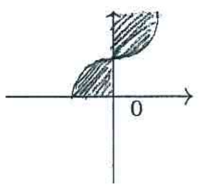
2. Sia $f:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ una funzione continua tale che $x\le f(x)\le 2x$ per $x\ge 0$. Quale delle seguenti equazioni ha certamente almeno una soluzione in $[0,+\infty)$? $\boxed{a}$ $f(x)=e^x+\frac{1}{2}$; $\boxtimes$ $f(x)=\frac{x^2}{4}+1$; $\boxed{c}$ $f(x)=x+1$; $\boxed{d}$ $f(x)=2x-1$.

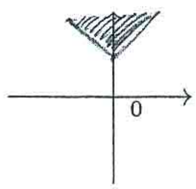
3. Siano $g(y)=\frac{1}{y}-y$ e $f(x)=x^2+1$. La retta normale al grafico della funzione $(g\circ f)(x)$ nel punto $(1,(g\circ f)(1))$ è: $\boxed{a}$ $y=-\frac{1}{8}x-\frac{7}{8}$; $\boxed{b}$ $y=\frac{1}{6}x+\frac{5}{6}$; $\boxtimes$ $y=\frac{2}{5}x-\frac{19}{10}$; $\boxed{d}$ $y=-\frac{4}{15}x+\frac{53}{30}$.

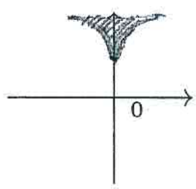
4. Sia $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$ derivabile, monotona e tale che $f(-1)f(1)>0$. Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxed{a}$ Se $g(x)=f(x^3)$ allora $g'(x)>0$ in $[-1,1]$; $\boxtimes$ $|f(x)|$ è sempre derivabile in $[-1,1]$; $\boxed{c}$ $|f(x)|$ è continua e mai derivabile in $[-1,1]$; $\boxed{d}$ $f(x)=|f(x)|$ in $[-1,1]$.

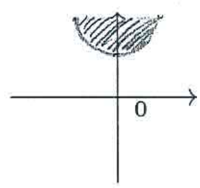
5. L'insieme degli $\alpha\in\mathbf{R}$ per i quali la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n^\alpha+n^{-\alpha}}$ converge è: $\boxed{a}$ $\alpha<-2$ e $2<\alpha$; $\boxtimes$ $\alpha<-3$ e $3<\alpha$; $\boxed{c}$ $-2<\alpha<2$; $\boxed{d}$ $-3<\alpha<3$.

6. In quale area tratteggiata è compreso il grafico della soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y'=3x^2+y^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$ per $x\in[-1,1]$?

$\boxtimes$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

7. L'insieme $\{z\in\mathbf{C}\,:\,|\frac{z+1}{z-1}|=1\}$ è: $\boxed{a}$ l'asse reale; $\boxed{b}$ il bordo di un quadrato; $\boxed{c}$ una circonferenza; $\boxtimes$ l'asse immaginario.

8. La funzione $f(x)=x^\alpha\left(1-\cos(\frac{1}{x^3})\right)$ ha un asintoto obliquo per $x\to+\infty$ se $\alpha=$ $\boxed{a}$ 6; $\boxed{b}$ -6; $\boxtimes$ 7; $\boxed{d}$ -7.

ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello		11 febbraio 2013
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Corso di laurea:		Test | Es1 | Es2 | Es3 |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Sia $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$ derivabile, monotona e tale che $f(-1)f(1) > 0$. Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxed{a}$ Se $g(x) = f(x^3)$ allora $g'(x) > 0$ in $[-1,1]$; $\boxed{b}$ $|f(x)|$ è sempre derivabile in $[-1,1]$; $\boxed{c}$ $|f(x)|$ è continua e mai derivabile in $[-1,1]$; $\boxed{d}$ $f(x) = |f(x)|$ in $[-1,1]$.

2. La funzione $f(x) = x^\alpha \left(1 - \cos(\frac{1}{x^3})\right)$ ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ se $\alpha =$ $\boxed{a}$ 6; $\boxed{b}$ −6; $\boxed{c}$ 7; $\boxed{d}$ −7.

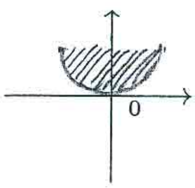
3. L'insieme degli $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^\alpha + n^{-\alpha}}$ converge è: $\boxed{a}$ $\alpha < -2$ e $2 < \alpha$; $\boxed{b}$ $\alpha < -3$ e $3 < \alpha$; $\boxed{c}$ $-2 < \alpha < 2$; $\boxed{d}$ $-3 < \alpha < 3$.

4. Indicate quale dei seguenti integrali impropri è convergente. $\boxed{a}$ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\log x}{|x-1|\sin x}\,dx$; $\boxed{b}$ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\log x}{(|x-1|\sin\sqrt{x})^2}\,dx$; $\boxed{c}$ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\log x}{|x-1|^5(\sin x^2)^{1/3}}\,dx$; $\boxed{d}$ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\log x}{|x-1|^3\sin x}\,dx$.

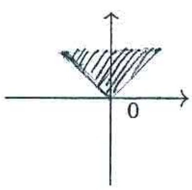
5. Siano $g(y) = \frac{1}{y} - 2y$ e $f(x) = x^2 - 2$. La retta normale al grafico della funzione $(g \circ f)(x)$ nel punto $(1, (g \circ f)(1))$ è: $\boxed{a}$ $y = -\frac{1}{8}x - \frac{7}{8}$; $\boxed{b}$ $y = \frac{1}{6}x + \frac{5}{6}$; $\boxed{c}$ $y = \frac{2}{5}x - \frac{19}{10}$; $\boxed{d}$ $y = -\frac{4}{15}x + \frac{53}{30}$.

6. L'insieme $\{z \in \mathbf{C} : |\frac{z+i}{z-i}| = 1\}$ è: $\boxed{a}$ l'asse reale; $\boxed{b}$ il bordo di un quadrato; $\boxed{c}$ una circonferenza; $\boxed{d}$ l'asse immaginario.

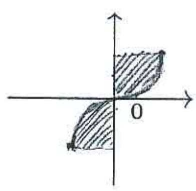
7. In quale area tratteggiata è compreso il grafico della soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = e^y + 3x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ per $x \in [-1,1]$?



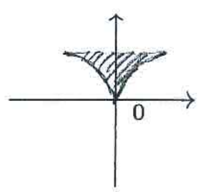
$\boxed{a}$;



$\boxed{b}$;



$\boxed{c}$;



$\boxed{d}$.

8. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $x \le f(x) \le 2x$ per $x \ge 0$. Quale delle seguenti equazioni ha certamente almeno una soluzione in $[0, +\infty)$? $\boxed{a}$ $f(x) = e^x + \frac{1}{2}$; $\boxed{b}$ $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$; $\boxed{c}$ $f(x) = x + 1$; $\boxed{d}$ $f(x) = 2x - 1$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Secondo appello		11 febbraio 2013
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Corso di laurea:		Test | Es1 | Es2 | Es3 |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta: +1.5. Risposta errata: −0.25.*

1. Siano $g(y) = \frac{1}{y} - 2y$ e $f(x) = x^2 - 2$. La retta normale al grafico della funzione $(g \circ f)(x)$ nel punto $(1, (g \circ f)(1))$ è: $\boxed{a}$ $y = -\frac{4}{15}x + \frac{53}{30}$; $\boxed{b}$ $y = -\frac{1}{8}x - \frac{7}{8}$; $\boxed{c}$ $y = \frac{1}{6}x + \frac{5}{6}$; $\boxed{d}$ $y = \frac{2}{5}x - \frac{19}{10}$.

2. L'insieme $\{z \in \mathbf{C} \ : |\frac{z+1}{z-1}| = 1\}$ è: $\boxed{a}$ l'asse immaginario; $\boxed{b}$ l'asse reale; $\boxed{c}$ il bordo di un quadrato; $\boxed{d}$ una circonferenza.

3. La funzione $f(x) = x^\alpha \left(1 - \cos(\frac{1}{\sqrt{x^3}})\right)$ ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ se $\alpha =$ $\boxed{a}$ -4; $\boxed{b}$ 3; $\boxed{c}$ -3; $\boxed{d}$ 4.

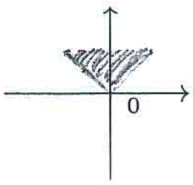
4. L'insieme degli $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5}{n^\alpha + n^{-\alpha}}$ converge è: $\boxed{a}$ $-6 < \alpha < 6$; $\boxed{b}$ $\alpha < -5$ e $5 < \alpha$; $\boxed{c}$ $\alpha < -6$ e $6 < \alpha$; $\boxed{d}$ $-5 < \alpha < 5$.

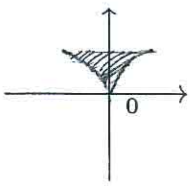
5. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $x \leq f(x) \leq 5x$ per $x \geq 0$. Quale delle seguenti equazioni ha certamente almeno una soluzione in $[0, +\infty)$? $\boxed{a}$ $f(x) = 5x - 1$; $\boxed{b}$ $f(x) = e^x + \frac{1}{5}$; $\boxed{c}$ $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$; $\boxed{d}$ $f(x) = x + 1$.

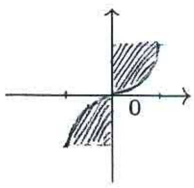
6. Sia $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ derivabile, monotona e tale che $f(-1)f(1) < 0$. Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxed{a}$ $f(0) = 0$; $\boxed{b}$ Se $g(x) = f(x^3)$ allora $g'(x) > 0$ in $[-1, 1]$; $\boxed{c}$ anche $|f(x)|$ può essere sempre derivabile in $[-1, 1]$; $\boxed{d}$ $|f(x)|$ è continua e mai derivabile in $[-1, 1]$.

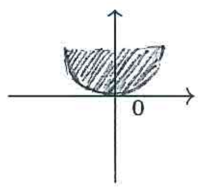
7. Indicate quale dei seguenti integrali impropri è convergente. $\boxed{a}$ $\int_0^{1/2} \frac{\log x}{|x-1|^3 \log(1+x)}\, dx$; $\boxed{b}$ $\int_0^{1/2} \frac{\log x}{|x-1| \log(1+x)}\, dx$; $\boxed{c}$ $\int_0^{1/2} \frac{\log x}{(|x-1| \log(1+\sqrt{x}))^2}\, dx$; $\boxed{d}$ $\int_0^{1/2} \frac{\log x}{|x-1|^5 (\sin x)^{1/2}}\, dx$.

8. In quale area tratteggiata è compreso il grafico della soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = e^y + 3x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ per $x \in [-1, 1]$?

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

ANALISI MATEMATICA 1	11 febbraio 2013

1. (6 punti) Calcolate
$$\lim_{x\to 0} \frac{3\sin^2 x + \log(1-3x^2)}{1-\cos(3x^2)}.$$

Sviluppiamo con la formula di Taylor: per $t \to 0$ si ha

$$\operatorname{sen} t = t - t^3/6 + o(t^3), \quad \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad \cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

per cui

$$3\sin^2 x = 3\left(x - x^3/6 + o(x^3)\right)^2 = 3\left(x^2 + \frac{x^6}{36} - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) = 3\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right),$$

$$\log(1-3x^2) = -3x^2 - \frac{(3x^2)^2}{2} + o(x^4) = -3x^2 - \frac{9}{2}x^4 + o(x^4),$$

$$1-\cos(3x^2) = 1 - \left(1 - \frac{9x^4}{2} + o(x^4)\right) = \frac{9}{2}x^4 + o(x^4).$$

In conclusione:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\sin^2 x + \log(1-3x^2)}{1-\cos(3x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{3x^2} - x^4 - \cancel{3x^2} - 9/2\, x^4 + o(x^4)}{\frac{9}{2}x^4 + o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{11}{2}x^4 + o(x^4)}{\frac{9}{2}x^4 + o(x^4)} = -\frac{11}{9}.$$

ANALISI MATEMATICA 1	11 febbraio 2013

2. (6 punti) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{\log 3} \frac{1}{e^x + 3e^{-x}}\, dx\,.$$

L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + 3e^{-x}}\, dx$ è convergente? E in caso affermativo, qual è il suo valore?

Cambiamo variabile con $t = e^x$, per cui $x = \log t$, $dx = \frac{1}{t}dt$, $x = 0$ dà $t = 1$ e $x = \log 3$ dà $t = 3$: si ha

$$\int_0^{\log 3} \frac{1}{e^x+3e^{-x}}\, dx = \int_1^3 \frac{1}{t+3/t}\,\frac{1}{t}\,dt = \int_1^3 \frac{t}{t^2+3}\,\frac{1}{t}\,dt = \int_1^3 \frac{1}{t^2+3}\,dt =$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t^2/3+1}\,dt = \frac{1}{3}(\operatorname{arctg} t/\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}\,\Big|_{t=1}^{t=3} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1/\sqrt{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\,.$$

L'integrale impropio è definito da

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+3e^{-x}}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{1}{e^x+3e^{-x}}\,dx.$$

Ripercorrendo il calcolo già fatto, siccome per $x=b$ si ha $t=e^b$, otteniamo

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{1}{e^x+3e^{-x}}dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}e^b\right) - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}}\pi\,.$$

Dunque l'integrale impropio è convergente e il suo valore è $\frac{1}{3\sqrt{3}}\pi$.

ANALISI MATEMATICA 1	11 febbraio 2013

3. (6 punti) Si determini per $t \geq 0$ la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -\dfrac{y(t)}{t+2} + e^{-2t} \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Quindi si calcoli $\lim_{t\to+\infty} t\,y(t)$.

È un'equazione del 1° ordine, lineare, non omogenea. La formula risolutiva dà:

$$y(t) = \left(1 + \int_0^t e^{\int_0^s \frac{1}{w+2}\,dw} e^{-2s}\,ds\right) e^{\int_0^t -\frac{1}{w+2}\,dw} =$$

$$\left[\int_0^t \frac{1}{w+2}\,dw = \log(w+2)\Big|_0^t = \log\frac{t+2}{2}.\right]$$

$$= \left(1 + \int_0^t e^{\log\frac{s+2}{2}} e^{-2s}\,ds\right) e^{-\log\frac{t+2}{2}} =$$

$$= \left(1 + \int_0^t \frac{s+2}{2} e^{-2s}\,ds\right) \frac{1}{e^{\log\frac{t+2}{2}}} = \left(1 + \frac{1}{2}\int_0^t (s+2)e^{-2s}\,ds\right)\frac{2}{t+2}.$$

Poi si ha

$$\int_0^t (s+2)e^{-2s}\,ds \overset{\text{per parti}}{=} -\frac{1}{2}e^{-2s}(s+2)\Big|_0^t + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-2s}\,ds = -\frac{1}{2}e^{-2t}(t+2) + 1 - \frac{1}{4}e^{-2s}\Big|_0^t =$$

$$= -\frac{1}{2}te^{-2t} - e^{-2t} + 1 - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}.$$

In conclusione

$$y(t) = \left[1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{5}{4}e^{-2t} + \frac{5}{4}\right)\right]\frac{2}{t+2} = \frac{2}{t+2}\left(\frac{13}{8} - \frac{5}{8}e^{-2t} - \frac{1}{4}te^{-2t}\right) =$$

$$= \frac{1}{2(t+2)}\left(\frac{13}{2} - \frac{5}{2}e^{-2t} - te^{-2t}\right).$$

Quindi

$$\lim_{t\to+\infty} t\,y(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{2(t+2)}\left(\frac{13}{2} - \frac{5}{2}e^{-2t} - te^{-2t}\right) = \frac{13}{4}.$$

$$\left[\lim_{t\to+\infty} te^{-2t} = 0\right]$$