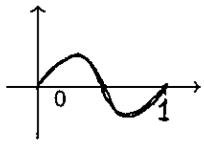
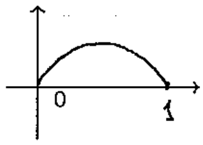
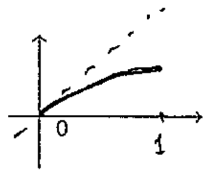
ANALISI MATEMATICA 1		12 febbraio 2010
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

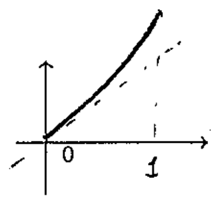
- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Il grafico della soluzione di $\begin{cases} y'' + \frac{\pi^2}{4} y = 0 \\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1 \end{cases}$ per $0 \le x \le 1$ è:

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; ☒ 

; $\boxed{d}$ 

.

2. L'insieme dei valori del parametro α per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2 + n^\alpha}$ converge assolutamente è: ☒ $\alpha > 2$; $\boxed{b}$ $\alpha > 1$; $\boxed{c}$ ogni $\alpha \in \mathbf{R}$; $\boxed{d}$ $\alpha > 3$.

3. L'area della regione piana compresa fra l'asse delle ascisse e il grafico di $f(x) = 2x + 2$ per $-2 \le x \le 2$ è: ☒ 10; $\boxed{b}$ 15/2; $\boxed{c}$ 8; $\boxed{d}$ 17/2.

4. La retta perpendicolare al grafico di $y = 2^x$ nel punto di ascissa $x = 1$ è: $\boxed{a}$ $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2x+2}{\log 2}$; $\boxed{b}$ $y = \dfrac{1}{4} - \dfrac{4x+8}{\log 2}$; $\boxed{c}$ $y = 4 - \dfrac{x-2}{4\log 2}$; ☒ $y = 2 - \dfrac{x-1}{2\log 2}$.

5. Sia g è una funzione continua e strettamente positiva in $\mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si definisca

$$G(x) = \int_1^{x^3} g(t)dt.$$

Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxed{a}$ G ha un minimo per $x = 1$; $\boxed{b}$ $\lim_{x \to +\infty} G(x) = +\infty$; ☒ G è strettamente crescente; $\boxed{d}$ G ha un minimo per $x = 0$.

6. L'insieme dei numeri complessi z che soddisfano $\operatorname{Im} z \ge 2$ e $|z - 1 + i| \le 2$ è: $\boxed{a}$ un semicerchio; $\boxed{b}$ un cerchio; ☒ l'insieme vuoto; $\boxed{d}$ un semipiano.

7. $\int_0^\pi e^{-3x^2} \cos(2x)\, dx =$ $\boxed{a}$ $-3 \int_0^\pi x e^{-3x^2} \sin(2x)\, dx$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{3} \int_0^\pi x e^{-3x^2} \sin(2x)\, dx$; $\boxed{c}$ $-\frac{1}{3} \int_0^\pi x e^{-3x^2} \sin(2x)\, dx$; ☒ $3 \int_0^\pi x e^{-3x^2} \sin(2x)\, dx$.

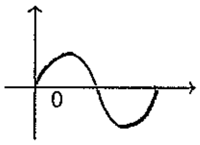
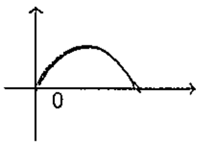
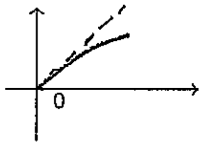
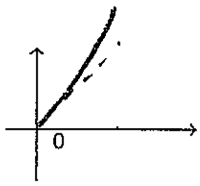
8. Siano $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \log x$. Il polinomio di Taylor, di grado 2 e con centro in $x = 1$, della funzione $(g \circ f)(x)$ è: $\boxed{a}$ $\frac{2x}{e}$; $\boxed{b}$ $\frac{2x}{e} + \frac{1}{2}(x - e)^2$; $\boxed{c}$ $x + \log 2 - 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2$; ☒ $x + \log 2 - 1$.

ANALISI MATEMATICA 1		12 febbraio 2010
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. Siano $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \log x$. Il polinomio di Taylor, di grado 2 e con centro in $x = 1$, della funzione $(g \circ f)(x)$ è: $\boxed{a}$ $x + \log 2 - 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2$; $\boxed{b}$ $x + \log 2 - 1$; $\boxed{c}$ $\frac{2x}{e}$; $\boxed{d}$ $\frac{2x}{e} + \frac{1}{2}(x-e)^2$.

2. Il grafico della soluzione di $\begin{cases} y'' - 4\pi^2 y = 0 \\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1 \end{cases}$ per $0 \le x \le 1$ è:

$\boxed{a}$  ; $\boxed{b}$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxed{d}$  .

3. L'insieme dei numeri complessi z che soddisfano $\operatorname{Im} z \le -1$ e $|z - 1 + 2i| \le 1$ è: $\boxed{a}$ l'insieme vuoto; $\boxed{b}$ un semipiano; $\boxed{c}$ un semicerchio; $\boxed{d}$ un cerchio.

4. L'insieme dei valori del parametro α per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^3 + n^\alpha}$ converge assolutamente è: $\boxed{a}$ ogni $\alpha \in \mathbf{R}$; $\boxed{b}$ $\alpha > 3$; $\boxed{c}$ $\alpha > 2$; $\boxed{d}$ $\alpha > 1$.

5. $\int_0^\pi e^{-3x^2} \cos(3x)\, dx =$ $\boxed{a}$ $-\frac{1}{2}\int_0^\pi x e^{-3x^2} \sin(3x)\, dx$; $\boxed{b}$ $2\int_0^\pi x e^{-3x^2} \sin(3x)\, dx$; $\boxed{c}$ $-2\int_0^\pi x e^{-3x^2} \sin(3x)\, dx$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{2}\int_0^\pi x e^{-3x^2} \sin(3x)\, dx$.

6. Sia g è una funzione continua e strettamente positiva in $\mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si definisca

$$G(x) = \int_1^{x^3} g(t)dt.$$

Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxed{a}$ G è strettamente crescente; $\boxed{b}$ G ha un minimo per $x = 0$; $\boxed{c}$ G ha un minimo per $x = 1$; $\boxed{d}$ $\lim_{x \to +\infty} G(x) = +\infty$.

7. L'area della regione piana compresa fra l'asse delle ascisse e il grafico di $f(x) = 2x + 2$ per $-2 \le x \le 2$ è: $\boxed{a}$ 8; $\boxed{b}$ 17/2; $\boxed{c}$ 10; $\boxed{d}$ 15/2.

8. La retta perpendicolare al grafico di $y = 2^x$ nel punto di ascissa $x = 2$ è: $\boxed{a}$ $y = 4 - \frac{x-2}{4\log 2}$; $\boxed{b}$ $y = 2 - \frac{x-1}{2\log 2}$; $\boxed{c}$ $y = \frac{1}{2} - \frac{2x+2}{\log 2}$; $\boxed{d}$ $y = \frac{1}{4} - \frac{4x+8}{\log 2}$.

ANALISI MATEMATICA 1		12 febbraio 2010
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. La retta perpendicolare al grafico di $y = 2^x$ nel punto di ascissa $x = 1$ è: $\boxed{a}$ $y = \frac{1}{2} - \frac{2x+2}{\log 2}$; $\boxed{b}$ $y = \frac{1}{4} - \frac{4x+8}{\log 2}$; $\boxed{c}$ $y = 4 - \frac{x-2}{4\log 2}$; $\boxtimes$ $y = 2 - \frac{x-1}{2\log 2}$.

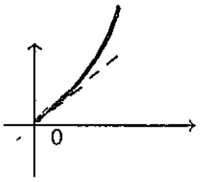
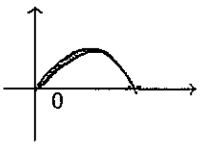
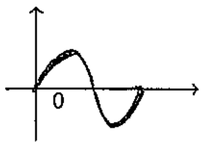
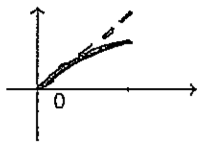
2. Siano $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \log x$. Il polinomio di Taylor, di grado 2 e con centro in $x = 1$, della funzione $(g \circ f)(x)$ è: $\boxed{a}$ $\frac{2x}{e}$; $\boxed{b}$ $\frac{2x}{e} + \frac{1}{2}(x-e)^2$; $\boxed{c}$ $x + \log 2 - 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2$; $\boxtimes$ $x + \log 2 - 1$.

3. Sia g è una funzione continua e strettamente positiva in $\mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si definisca

$$G(x) = \int_1^{x^3} g(t)dt.$$

Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxed{a}$ G ha un minimo per $x = 1$; $\boxed{b}$ $\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$; $\boxtimes$ G è strettamente crescente; $\boxed{d}$ G ha un minimo per $x = 0$.

4. Il grafico della soluzione di $\begin{cases} y'' + \frac{\pi^2}{4} y = 0 \\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1 \end{cases}$ per $0 \le x \le 1$ è:

$\boxed{a}$  ; $\boxed{b}$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxtimes$  .

5. L'area della regione piana compresa fra l'asse delle ascisse e il grafico di $f(x) = 2x + 2$ per $-2 \le x \le 2$ è: $\boxtimes$ 10; $\boxed{b}$ 15/2; $\boxed{c}$ 8; $\boxed{d}$ 17/2.

6. $\int_0^\pi e^{-3x^2} \cos(2x)\, dx =$ $\boxed{a}$ $-3\int_0^\pi xe^{-3x^2} \sin(2x)\, dx$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{3}\int_0^\pi xe^{-3x^2} \sin(2x)\, dx$; $\boxed{c}$ $-\frac{1}{3}\int_0^\pi xe^{-3x^2} \sin(2x)\, dx$; $\boxtimes$ $3\int_0^\pi xe^{-3x^2} \sin(2x)\, dx$.

7. L'insieme dei numeri complessi z che soddisfano $\mathrm{Re}\, z \ge 1$ e $|z - i + 1| \ge 2$ è: $\boxed{a}$ un semicerchio; $\boxed{b}$ un cerchio; $\boxed{c}$ l'insieme vuoto; $\boxtimes$ un semipiano.

8. L'insieme dei valori del parametro α per cui la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^3 + n^\alpha}$ converge assolutamente è: $\boxed{a}$ $\alpha > 2$; $\boxed{b}$ $\alpha > 1$; $\boxtimes$ ogni $\alpha \in \mathbf{R}$; $\boxed{d}$ $\alpha > 3$.

ANALISI MATEMATICA 1		12 febbraio 2010
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

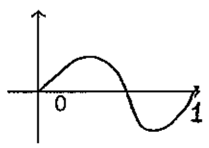
1. L'insieme dei numeri complessi z che soddisfano $\operatorname{Im} z \leq -1$ e $|z-1+2i| \leq 1$ è: $\boxtimes$ un cerchio; $\boxed{b}$ l'insieme vuoto; $\boxed{c}$ un semipiano; $\boxed{d}$ un semicerchio.

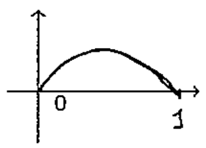
2. L'area della regione piana compresa fra l'asse delle ascisse e il grafico di $f(x) = 2x+1$ per $-2 \leq x \leq 2$ è: $\boxed{a}$ $15/2$; $\boxed{b}$ 8; $\boxtimes$ $17/2$; $\boxed{d}$ 10.

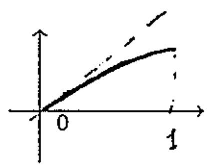
3. La retta perpendicolare al grafico di $y = 2^x$ nel punto di ascissa $x = -1$ è: $\boxed{a}$ $y = \frac{1}{4} - \frac{4x+8}{\log 2}$; $\boxed{b}$ $y = 4 - \frac{x-2}{4\log 2}$; $\boxed{c}$ $y = 2 - \frac{x-1}{2\log 2}$; $\boxtimes$ $y = \frac{1}{2} - \frac{2x+2}{\log 2}$.

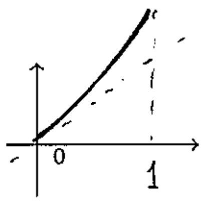
4. $\int_0^\pi e^{-2x^2}\cos(2x)\,dx =$ $\boxed{a}$ $\frac{1}{2}\int_0^\pi xe^{-2x^2}\sin(2x)\,dx$; $\boxed{b}$ $-\frac{1}{2}\int_0^\pi xe^{-2x^2}\sin(2x)\,dx$; $\boxtimes$ $2\int_0^\pi xe^{-2x^2}\sin(2x)\,dx$; $\boxed{d}$ $-2\int_0^\pi xe^{-2x^2}\sin(2x)\,dx$.

5. Il grafico della soluzione di $\begin{cases} y'' + 4\pi^2 y = 0 \\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1 \end{cases}$ per $0 \leq x \leq 1$ è:

$\boxtimes$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

6. L'insieme dei valori del parametro α per cui la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n+1}{n^3+n^\alpha}$ converge assolutamente è: $\boxed{a}$ $\alpha > 1$; $\boxtimes$ ogni $\alpha \in \mathbf{R}$; $\boxed{c}$ $\alpha > 3$; $\boxed{d}$ $\alpha > 2$.

7. Siano $f(x) = x^2+1$ e $g(x) = \log x$. Il polinomio di Taylor, di grado 2 e con centro in $x = e$, della funzione $(f \circ g)(x)$ è: $\boxed{a}$ $\frac{2x}{e} + \frac{1}{2}(x-e)^2$; $\boxed{b}$ $x + \log 2 - 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2$; $\boxed{c}$ $x + \log 2 - 1$; $\boxtimes$ $\frac{2x}{e}$.

8. Sia g è una funzione continua e strettamente positiva in $\mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si definisca

$$G(x) = \int_1^{x^2} g(t)dt.$$

Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxed{a}$ $\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$; $\boxed{b}$ G è strettamente crescente; $\boxtimes$ G ha un minimo per $x = 0$; $\boxed{d}$ G ha un minimo per $x = 1$.

ANALISI MATEMATICA 1		12 febbraio 2010
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. Sia g è una funzione continua e strettamente positiva in $\mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si definisca

$$G(x) = \int_1^{x^2} g(t)dt.$$

Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxtimes$ G ha un minimo per $x = 0$; $\boxed{b}$ G ha un minimo per $x = 1$; $\boxed{c}$ $\lim_{x \to +\infty} G(x) = +\infty$; $\boxed{d}$ G è strettamente crescente.

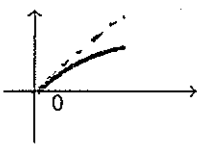
2. L'insieme dei numeri complessi z che soddisfano $\mathrm{Re}\, z \leq 2$ e $|z + i - 2| \leq 2$ è: $\boxed{a}$ un semipiano; $\boxtimes$ un semicerchio; $\boxed{c}$ un cerchio; $\boxed{d}$ l'insieme vuoto.

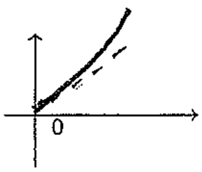
3. L'insieme dei valori del parametro α per cui la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n+n^\alpha}$ converge assolutamente è: $\boxtimes$ $\alpha > 3$; $\boxed{b}$ $\alpha > 2$; $\boxed{c}$ $\alpha > 1$; $\boxed{d}$ ogni $\alpha \in \mathbf{R}$.

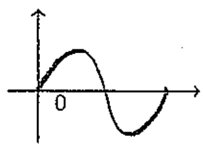
4. L'area della regione piana compresa fra l'asse delle ascisse e il grafico di $f(x) = 2x + 1$ per $-2 \leq x \leq 2$ è: $\boxtimes$ $17/2$; $\boxed{b}$ 10; $\boxed{c}$ $15/2$; $\boxed{d}$ 8.

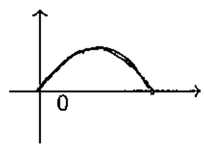
5. Siano $f(x) = x^2+1$ e $g(x) = \log x$. Il polinomio di Taylor, di grado 2 e con centro in $x = e$, della funzione $(f \circ g)(x)$ è: $\boxed{a}$ $x + \log 2 - 1$; $\boxtimes$ $\frac{2x}{e}$; $\boxed{c}$ $\frac{2x}{e} + \frac{1}{2}(x-e)^2$; $\boxed{d}$ $x + \log 2 - 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2$.

6. Il grafico della soluzione di $\begin{cases} y'' + \pi^2 y = 0 \\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1 \end{cases}$ per $0 \leq x \leq 1$ è:

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxtimes$ 

.

7. La retta perpendicolare al grafico di $y = 2^x$ nel punto di ascissa $x = -2$ è: $\boxed{a}$ $y = 2 - \frac{x-1}{2\log 2}$; $\boxed{b}$ $y = \frac{1}{2} - \frac{2x+2}{\log 2}$; $\boxtimes$ $y = \frac{1}{4} - \frac{4x+8}{\log 2}$; $\boxed{d}$ $y = 4 - \frac{x-2}{4\log 2}$.

8. $\int_0^\pi e^{-2x^2} \cos(3x)\, dx =$ $\boxtimes$ $\frac{4}{3} \int_0^\pi x e^{-2x^2} \sin(3x)\, dx$; $\boxed{b}$ $-\frac{4}{3} \int_0^\pi x e^{-2x^2} \sin(3x)\, dx$; $\boxed{c}$ $\frac{3}{4} \int_0^\pi x e^{-2x^2} \sin(3x)\, dx$; $\boxed{d}$ $-\frac{3}{4} \int_0^\pi x e^{-2x^2} \sin(3x)\, dx$.

ANALISI MATEMATICA 1		12 febbraio 2010
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. L'area della regione piana compresa fra l'asse delle ascisse e il grafico di $f(x) = 2x + 1$ per $-2 \le x \le 2$ è: $\boxtimes$ 17/2; $\boxed{b}$ 10; $\boxed{c}$ 15/2; $\boxed{d}$ 8.

2. $\int_0^\pi e^{-2x^2} \cos(3x)\, dx =$ $\boxtimes$ $\frac{4}{3} \int_0^\pi x e^{-2x^2} \sin(3x)\, dx$; $\boxed{b}$ $-\frac{4}{3} \int_0^\pi x e^{-2x^2} \sin(3x)\, dx$; $\boxed{c}$ $\frac{3}{4} \int_0^\pi x e^{-2x^2} \sin(3x)\, dx$; $\boxed{d}$ $-\frac{3}{4} \int_0^\pi x e^{-2x^2} \sin(3x)\, dx$.

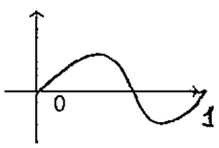
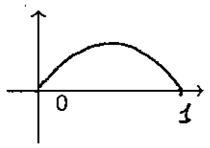
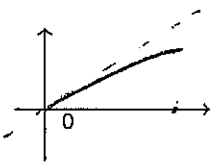
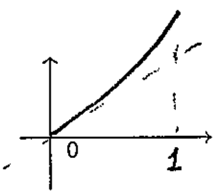
3. Siano $f(x) = x^2+1$ e $g(x) = \log x$. Il polinomio di Taylor, di grado 2 e con centro in $x = e$, della funzione $(f \circ g)(x)$ è: $\boxed{a}$ $x+\log 2-1$; $\boxtimes$ $\frac{2x}{e}$; $\boxed{c}$ $\frac{2x}{e}+\frac{1}{2}(x-e)^2$; $\boxed{d}$ $x+\log 2-1+\frac{1}{2}(x-1)^2$.

4. Sia g è una funzione continua e strettamente positiva in $\mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si definisca
$$G(x) = \int_1^{x^2} g(t)dt.$$
Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxtimes$ G ha un minimo per $x = 0$; $\boxed{b}$ G ha un minimo per $x = 1$; $\boxed{c}$ $\lim_{x \to +\infty} G(x) = +\infty$; $\boxed{d}$ G è strettamente crescente.

5. L'insieme dei valori del parametro α per cui la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+n^\alpha}$ converge assolutamente è: $\boxed{a}$ $\alpha > 3$; $\boxtimes$ $\alpha > 2$; $\boxed{c}$ $\alpha > 1$; $\boxed{d}$ ogni $\alpha \in \mathbf{R}$.

6. La retta perpendicolare al grafico di $y = 2^x$ nel punto di ascissa $x = -2$ è: $\boxed{a}$ $y = 2 - \frac{x-1}{2\log 2}$; $\boxed{b}$ $y = \frac{1}{2} - \frac{2x+2}{\log 2}$; $\boxtimes$ $y = \frac{1}{4} - \frac{4x+8}{\log 2}$; $\boxed{d}$ $y = 4 - \frac{x-2}{4\log 2}$.

7. Il grafico della soluzione di $\begin{cases} y'' + \pi^2 y = 0 \\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1 \end{cases}$ per $0 \le x \le 1$ è:

$\boxed{a}$  ; $\boxtimes$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxed{d}$  .

8. L'insieme dei numeri complessi z che soddisfano $\mathrm{Re}\, z \le 2$ e $|z + i - 2| \le 2$ è: $\boxed{a}$ un semipiano; $\boxtimes$ un semicerchio; $\boxed{c}$ un cerchio; $\boxed{d}$ l'insieme vuoto.

ANALISI MATEMATICA 1		12 febbraio 2010
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. L'insieme dei valori del parametro α per cui la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n^2+1}{n+n^\alpha}$ converge assolutamente è: $\boxed{a}$ ogni $\alpha \in \mathbf{R}$; $\boxed{b}$ $\alpha > 3$; $\boxed{c}$ $\alpha > 2$; $\boxed{d}$ $\alpha > 1$.

2. La retta perpendicolare al grafico di $y = 2^x$ nel punto di ascissa $x = 2$ è: $\boxed{a}$ $y = 4 - \frac{x-2}{4\log 2}$; $\boxed{b}$ $y = 2 - \frac{x-1}{2\log 2}$; $\boxed{c}$ $y = \frac{1}{2} - \frac{2x+2}{\log 2}$; $\boxed{d}$ $y = \frac{1}{4} - \frac{4x+8}{\log 2}$.

3. $\int_0^\pi e^{-3x^2}\cos(3x)\,dx =$ $\boxed{a}$ $-\frac{1}{2}\int_0^\pi xe^{-3x^2}\sin(3x)\,dx$; $\boxed{b}$ $2\int_0^\pi xe^{-3x^2}\sin(3x)\,dx$; $\boxed{c}$ $-2\int_0^\pi xe^{-3x^2}\sin(3x)\,dx$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{2}\int_0^\pi xe^{-3x^2}\sin(3x)\,dx$.

4. Siano $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \log x$. Il polinomio di Taylor, di grado 2 e con centro in $x = 1$, della funzione $(g \circ f)(x)$ è: $\boxed{a}$ $x + \log 2 - 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2$; $\boxed{b}$ $x + \log 2 - 1$; $\boxed{c}$ $\frac{2x}{e}$; $\boxed{d}$ $\frac{2x}{e} + \frac{1}{2}(x-e)^2$.

5. L'insieme dei numeri complessi z che soddisfano $\operatorname{Im} z \geq 2$ e $|z - 1 + i| \leq 2$ è: $\boxed{a}$ l'insieme vuoto; $\boxed{b}$ un semipiano; $\boxed{c}$ un semicerchio; $\boxed{d}$ un cerchio.

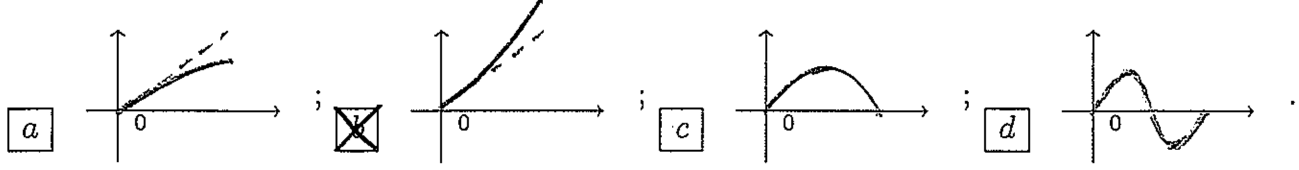
6. L'area della regione piana compresa fra l'asse delle ascisse e il grafico di $f(x) = 2x + 2$ per $-2 \leq x \leq 2$ è: $\boxed{a}$ 8; $\boxed{b}$ 17/2; $\boxed{c}$ 10; $\boxed{d}$ 15/2.

7. Sia g è una funzione continua e strettamente positiva in $\mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si definisca

$$G(x) = \int_1^{x^3} g(t)dt.$$

Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxed{a}$ G è strettamente crescente; $\boxed{b}$ G ha un minimo per $x = 0$; $\boxed{c}$ G ha un minimo per $x = 1$; $\boxed{d}$ $\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$.

8. Il grafico della soluzione di $\begin{cases} y'' - 4\pi^2 y = 0 \\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1 \end{cases}$ per $0 \leq x \leq 1$ è:



ANALISI MATEMATICA 1		12 febbraio 2010
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

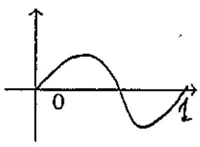
1. $\int_0^\pi e^{-2x^2}\cos(2x)\,dx =$ $\boxed{a}$ $\frac{1}{2}\int_0^\pi xe^{-2x^2}\sin(2x)\,dx$; $\boxed{b}$ $-\frac{1}{2}\int_0^\pi xe^{-2x^2}\sin(2x)\,dx$; $\boxed{\cancel{c}}$ $2\int_0^\pi xe^{-2x^2}\sin(2x)\,dx$; $\boxed{d}$ $-2\int_0^\pi xe^{-2x^2}\sin(2x)\,dx$.

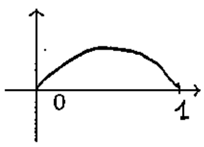
2. Sia g è una funzione continua e strettamente positiva in $\mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si definisca

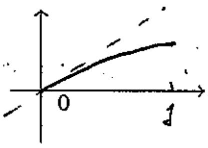
$$G(x) = \int_1^{x^2} g(t)dt.$$

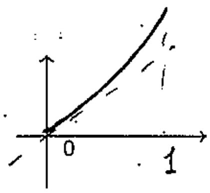
Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxed{a}$ $\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$; $\boxed{b}$ G è strettamente crescente; $\boxed{\cancel{c}}$ G ha un minimo per $x = 0$; $\boxed{d}$ G ha un minimo per $x = 1$.

3. Il grafico della soluzione di $\begin{cases} y'' + 4\pi^2 y = 0 \\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1 \end{cases}$ per $0 \le x \le 1$ è:

$\boxed{\cancel{a}}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

4. L'insieme dei numeri complessi z che soddisfano $\operatorname{Re} z \ge 1$ e $|z - i + 1| \ge 2$ è: $\boxed{a}$ un cerchio; $\boxed{b}$ l'insieme vuoto; $\boxed{\cancel{c}}$ un semipiano; $\boxed{d}$ un semicerchio.

5. La retta perpendicolare al grafico di $y = 2^x$ nel punto di ascissa $x = -1$ è: $\boxed{a}$ $y = \frac{1}{4} - \frac{4x+8}{\log 2}$; $\boxed{b}$ $y = 4 - \frac{x-2}{4\log 2}$; $\boxed{c}$ $y = 2 - \frac{x-1}{2\log 2}$; $\boxed{\cancel{d}}$ $y = \frac{1}{2} - \frac{2x+2}{\log 2}$.

6. Siano $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \log x$. Il polinomio di Taylor, di grado 2 e con centro in $x = e$, della funzione $(f \circ g)(x)$ è: $\boxed{a}$ $\frac{2x}{e} + \frac{1}{2}(x-e)^2$; $\boxed{b}$ $x + \log 2 - 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2$; $\boxed{c}$ $x + \log 2 - 1$; $\boxed{\cancel{d}}$ $\frac{2x}{e}$.

7. L'insieme dei valori del parametro α per cui la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2 + n^\alpha}$ converge assolutamente è: $\boxed{a}$ $\alpha > 1$; $\boxed{b}$ ogni $\alpha \in \mathbf{R}$; $\boxed{c}$ $\alpha > 3$; $\boxed{\cancel{d}}$ $\alpha > 2$.

8. L'area della regione piana compresa fra l'asse delle ascisse e il grafico di $f(x) = 2x + 1$ per $-2 \le x \le 2$ è: $\boxed{a}$ 15/2; $\boxed{b}$ 8; $\boxed{\cancel{c}}$ 17/2; $\boxed{d}$ 10.

ANALISI MATEMATICA 1	12 febbraio 2010

1. **(6 punti)** Per $x > 0$ risolvete il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = (1+e^{-2y}) \log x \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Esistono valori $x > 1$ per cui $y(x) = 0$?

È un'equazione del 1° ordine, non lineare, a variabili separabili.

Si può scrivere come

$$\frac{dy}{dx} = (1+e^{-2y}) \log x \quad , \text{ cioè } \quad \frac{dy}{1+e^{-2y}} = \log x \, dx .$$

Ancora: $\dfrac{1}{1+e^{-2y}} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{e^{2y}}} = \dfrac{1}{\frac{e^{2y}+1}{e^{2y}}} = \dfrac{e^{2y}}{e^{2y}+1}$, che è la forma più "comoda".

Integrando in dy e in dx si ottiene:

$$e^{2y} = t \ , \ y = \tfrac{1}{2}\log t \ , \ dy = \tfrac{1}{2t} dt$$

$$\int \frac{e^{2y}}{e^{2y}+1} \, dy \overset{\uparrow}{=} \int \frac{t}{t+1} \frac{1}{2t} \, dt = \frac{1}{2} \log(t+1)|_{t=e^{2y}} = \frac{1}{2} \log(e^{2y}+1)$$

$$\int \log x \, dx \underset{\substack{\downarrow \\ \text{per parti}}}{=} x \log x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \log x - x + \text{cost}.$$

Così si è ottenuto $\frac{1}{2}\log(e^{2y}+1) = x \log x - x + \text{cost}$. Dalla condizione $y(1) = 0$ deriva

$$\frac{1}{2} \log 2 = -1 + \text{cost} \ , \quad \text{cioè} \quad \text{cost} = 1 + \frac{1}{2} \log 2 .$$

Dunque

$$\frac{1}{2} \log (e^{2y}+1) = x \log x - x + 1 + \frac{1}{2} \log 2$$

$$\log (e^{2y}+1) = 2x \log x - 2x + 2 + \log 2$$

$$e^{2y} + 1 = e^{2x \log x} \cdot e^{-2x} \cdot e^{2} \cdot 2 \qquad [e^{\log 2} = 2 \ldots]$$

$$2y = \log \left(2e^{2} e^{-2x} e^{2x \log x} - 1 \right)$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2} \log \left(2e^{2} e^{-2x} e^{2x \log x} - 1 \right)} .$$

Siccome dall'equazione $y' = (1+e^{-2y}) \log x$ si ha $y'(x) > 0$ per $x > 1$, $y(x)$ cresce strettamente, e dunque $\underline{y(x) > y(1) = 0}$ per $x > 1$.

ANALISI MATEMATICA 1 | 12 febbraio 2010

1. (6 punti) Per $x > 0$ risolvete il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = (1+e^{-2y})\log x \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Esistono valori $x > 1$ per cui $y(x) = 0$?

È un'equazione del 1° ordine, non lineare, a variabili separabili.

Si può scrivere come

$$\frac{dy}{dx} = (1+e^{-2y})\log x \quad , \text{ cioè } \quad \frac{dy}{1+e^{-2y}} = \log x \, dx .$$

Ancora: $\frac{1}{1+e^{-2y}} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^{2y}}} = \frac{1}{\frac{e^{2y}+1}{e^{2y}}} = \frac{e^{2y}}{e^{2y}+1}$, che è la forma più "comoda".

Integrando in dy e in dx si ottiene:

$$e^{2y}=t \;,\; y=\tfrac{1}{2}\log t \;,\; dy = \tfrac{1}{2t}\,dt$$

$$\int \frac{e^{2y}}{e^{2y}+1}\,dy = \int \frac{t}{t+1}\,\frac{1}{2t}\,dt = \frac{1}{2}\log(t+1)\Big|_{t=e^{2y}} = \frac{1}{2}\log(e^{2y}+1)$$

$$\int \log x \, dx \underset{\text{per parti}}{=} x\log x - \int x\,\frac{1}{x}\,dx = x\log x - x + cost.$$

Così si è ottenuto $\frac{1}{2}\log(e^{2y}+1) = x\log x - x + cost.$ Dalla condizione $y(1)=0$ deriva

$$\frac{1}{2}\log 2 = -1 + cost \;, \quad \text{cioè} \quad cost = 1+\frac{1}{2}\log 2 .$$

Dunque

$$\frac{1}{2}\log(e^{2y}+1) = x\log x - x + 1 + \frac{1}{2}\log 2$$

$$\log(e^{2y}+1) = 2x\log x - 2x + 2 + \log 2$$

$$e^{2y}+1 = e^{2x\log x}\cdot e^{-2x}\cdot e^{2}\cdot 2 \qquad [e^{\log 2} = 2 \ldots.]$$

$$2y = \log\left(2e^{2}e^{-2x}e^{2x\log x} - 1\right)$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2}\log\left(2e^{2}e^{-2x}e^{2x\log x} - 1\right)}$$

Siccome dall'equazione $y' = (1+e^{-2y})\log x$ si ha $y'(x) > 0$ per $x > 1$, $y(x)$ cresce strettamente, e dunque $y(x) > y(1) = 0$ per $x > 1$.

ANALISI MATEMATICA 1 | 12 febbraio 2010

2. (6 punti) Trovate, per $k = 2$ e $k = 5$, i massimi e minimi locali ed assoluti (se esistono) di f definita da

$$f(x) = |x^2-4| - k(x-2).$$

Disegnate approssimativamente il grafico di f nei due casi.

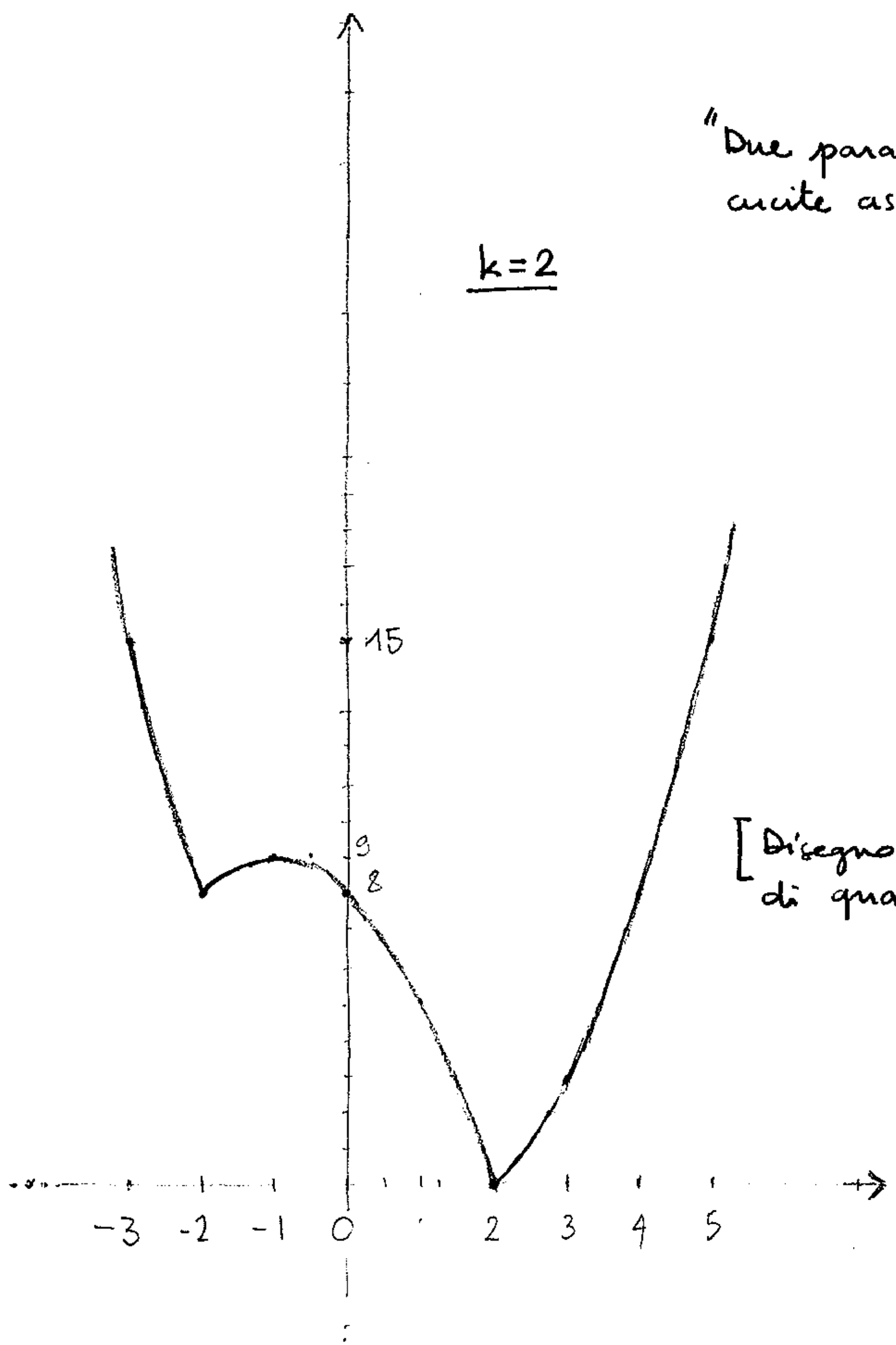
Si ha $|x^2-4| = x^2-4$ per $x^2-4 \geq 0$, cioè $x \leq -2$ e $x \geq 2$.

Si ha $|x^2-4| = 4-x^2$ per $x^2-4 < 0$, cioè $-2 < x < 2$.

■ Consideriamo $k=2$: la funzione $f(x)$ è data da $x^2-4-2(x-2) = x^2-2x$ per $x \leq -2$ e $x \geq 2$; è data da $4-x^2-2(x-2) = -x^2-2x+8$ per $-2<x<2$.
Calcoliamo la derivata prima: per $x \leq -2$ e $x \geq 2$ si ha $f'(x) = (x^2-2x)' = 2x-2$, che è ≥ 0 per $x \geq 1$. Dunque abbiamo che $f(x)$ decresce per $x \leq -2$ e cresce per $x \geq 2$.
Per $-2<x<2$ si ha $f'(x) = (-x^2-2x+8)' = -2x-2$, che è ≥ 0 per $x \leq -1$. Dunque $f(x)$ cresce per $-2 < x \leq -1$ e decresce per $-1 \leq x < 2$.
Quindi $x=-2$ è ~~un~~ punto di minimo relativo, $x=-1$ è un punto di massimo relativo, $x=2$ è un punto di minimo relativo. Siccome $f(-2) = 8$ e $f(2) = 0$, $x=2$ è in effetti punto di minimo assoluto. Siccome $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$, non esiste il massimo assoluto. Nel punto di massimo relativo si ha $f(-1) = 9$.

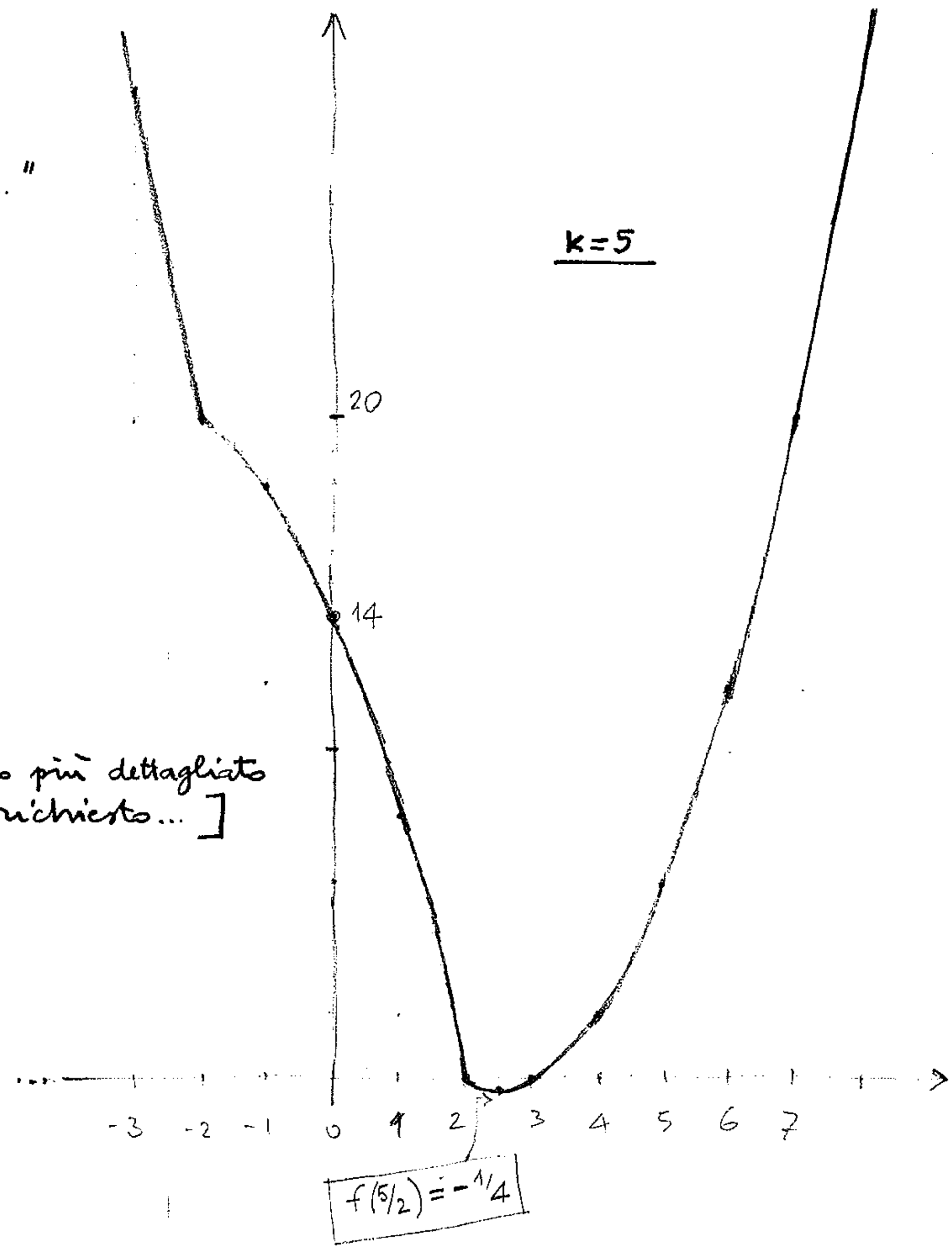
■ Consideriamo $k=5$: si ha $f(x) = x^2-4-5(x-2) = x^2-5x+6$ per $x \leq -2$ e $x \geq 2$; $f(x) = 4-x^2-5(x-2) = -x^2-5x+14$ per $-2<x<2$.
La derivata vale $f'(x) = 2x-5$ per $x \leq -2$ e $x \geq 2$, ed è ≥ 0 per $x \geq 5/2$. Dunque $f(x)$ cresce per $x \geq 5/2$ e decresce per $x \leq -2$ e $2 \leq x \leq 5/2$. Per $-2<x<2$ la derivata vale $f'(x) = -2x-5$, ed è ≥ 0 per $x \leq -5/2$.
Quindi $f(x)$ decresce per $-2<x<2$. In conclusione, $f(x)$ decresce per $x \leq 5/2$ e cresce per $x \geq 5/2$, e $x = 5/2$ è punto di minimo assoluto, con valore di minimo $f(5/2) = -1/4$. Siccome $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, non esiste massimo assoluto.

[Per i grafici vedere l'altro foglio.]



"Due parabole cucite assieme..."

[Disegno molto più dettagliato di quanto richiesto...]



ANALISI MATEMATICA 1	12 febbraio 2010

3. **(6 punti)** Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 - \sin^2 x}{\log\big(\cos(3x)\big)}.$$

Conosciamo gli sviluppi (per $t \to 0$):

$$e^t = 1+t+o(t) \quad ; \quad \sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) \quad ; \quad \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \; ;$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Dunque

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + o(x^2) \quad ; \quad \sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \; ;$$

$$\log(\cos(3x)) = \log(1 + \cos(3x) - 1) = \log\left(1 - \frac{(3x)^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{9x^2}{2} + o(x^2),$$

e così

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 - \sin^2 x}{\log(\cos(3x))} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + o(x^2) - \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)}{-\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2 + o(x^2)}{-\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)} = \frac{4}{9}.$$

Se si preferisce la regola de l'Hopital: derivando numeratore e denominatore si ottiene

$$\frac{-2x\, e^{-x^2} - 2\sin x \cos x}{\frac{1}{\cos(3x)}\left(-3\operatorname{sen}(3x)\right)},$$ che è ancora una forma indeterminata.

Derivando un'altra volta (senza considerare il termine $\cos(3x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$):

$$\frac{-2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} - 2\cos^2 x + 2\sin^2 x}{-9\cos(3x)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{-4}{-9} = \frac{4}{9}.$$