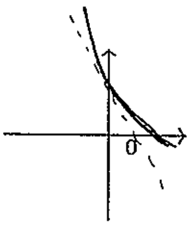
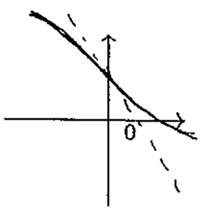
ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello		12 settembre 2011
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Corso di laurea:		Test |Es1 |Es2 |Es3 |

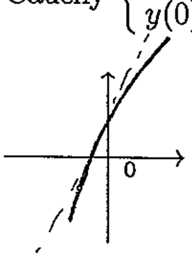
- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

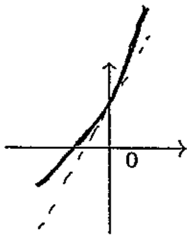
1. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x^2\cos(2x)dx =$ $\boxed{a}$ $-\frac{\pi}{4}$; $\boxed{\cancel{b}}$ $\frac{1}{32}(\pi^2-8)$; $\boxed{c}$ $\frac{1}{8}(\pi-2)$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{8}(\pi^2-4)$.

2. La soluzione in un intorno di $x=0$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = e^y(y-2) \\ y(0)=1 \end{cases}$ è

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{\cancel{b}}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

3. Quale è l'insieme dei valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\cos(\frac{1}{n^\alpha})\right)$ converge?
$\boxed{a}$ $\alpha > 1$; $\boxed{b}$ $\alpha < -1$; $\boxed{c}$ $\alpha < -\frac{1}{2}$; $\boxed{\cancel{d}}$ $\alpha > \frac{1}{2}$.

4. Quale delle seguenti è la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ $\boxed{a}$ per ogni K esiste $M=M(K)$ tale che se $x > M$ allora $f(x) > K$; $\boxed{\cancel{b}}$ per ogni K esiste $M = M(K)$ tale che se $x > M$ allora $f(x) < K$; $\boxed{c}$ per ogni K esiste $\delta = \delta(K)$ tale che se $0 < |x| < \delta$ allora $f(x) > K$; $\boxed{d}$ per ogni $\epsilon > 0$ esiste $M = M(\epsilon)$ tale che se $x > M$ allora $|f(x)| < \epsilon$.

5. Se $f : R\setminus\{0\} \to R$ è una funzione derivabile, quale delle seguenti affermazioni è sempre vera?
$\boxed{\cancel{a}}$ Se f è crescente allora $\lim_{x\to 0^-} f(x) < +\infty$; $\boxed{b}$ f ha un asintoto verticale nel punto $x=0$;
$\boxed{c}$ Se f ha un asintoto verticale nel punto $x = 0$ allora $f'(x)$ ha sempre lo stesso segno;
$\boxed{d}$ Se $f'(x) > 0$ per tutti gli $x \in R\setminus\{0\}$ allora f è crescente.

6. Per quali valori dei parametri $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\beta \in \mathbf{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan(\alpha x)}{x} & \text{per } x > 0,\ x \text{ vicino a } 0 \\ -\beta e^x + \sin x + 2x^2 & \text{per } x \le 0 \end{cases}$$

è continua e derivabile in $x=0$?
$\boxed{a}$ $\alpha=-1, \beta=-\frac{3}{2}$; $\boxed{b}$ $\alpha=1, \beta=-\frac{1}{2}$; $\boxed{\cancel{c}}$ $\alpha=-1, \beta=1$; $\boxed{d}$ $\alpha=1, \beta=-1$.

7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2^{-x}+\sin(x^2)}{e^{-x}-x^3} =$ $\boxed{\cancel{a}}$ -1; $\boxed{b}$ $+\infty$; $\boxed{c}$ $-\infty$; $\boxed{d}$ 0.

8. Se $z \in C$ è la soluzione di $(z-1)(\bar{z}+1) = 1$ allora $\boxed{a}$ z è immaginario puro e non zero; $\boxed{b}$ $|z|=1$; $\boxed{c}$ l'argomento di z è $\pi/4$; $\boxed{\cancel{d}}$ z è reale e non zero.

ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello		12 settembre 2011
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Corso di laurea:		Test | Es1 | Es2 | Es3 |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

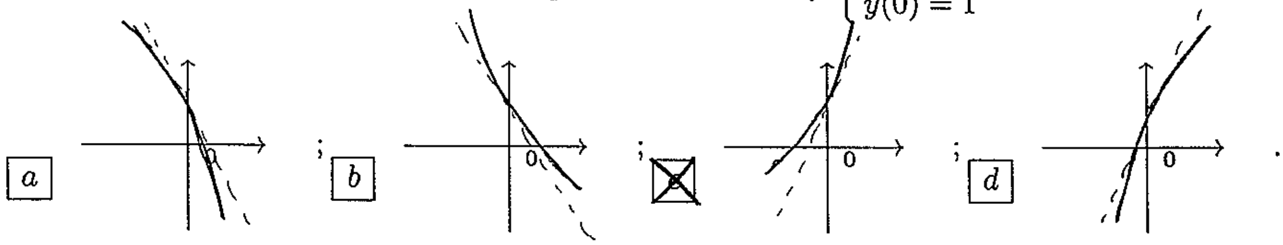
1. Se $f : R \setminus \{0\} \to R$ è una funzione derivabile, quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxed{a}$ Se $f'(x) > 0$ per tutti gli $x \in R \setminus \{0\}$ allora f è crescente; ☒ Se f è crescente allora $\lim_{x \to 0^-} f(x) < +\infty$; $\boxed{c}$ f ha un asintoto verticale nel punto $x = 0$; $\boxed{d}$ Se f ha un asintoto verticale nel punto $x = 0$ allora $f'(x)$ ha sempre lo stesso segno.

2. Per quali valori dei parametri $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\beta \in \mathbf{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\alpha x)}{x} & \text{per } x > 0 \\ x^2 - \beta e^{-x} + \sin x & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

è continua e derivabile in $x = 0$?
☒ $\alpha = 1, \beta = -1$; $\boxed{b}$ $\alpha = -1, \beta = -\frac{3}{2}$; $\boxed{c}$ $\alpha = 1, \beta = -\frac{1}{2}$; $\boxed{d}$ $\alpha = -1, \beta = 1$.

3. La soluzione in un intorno di $x = 0$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = e^y(y+2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ è



4. Quale è l'insieme dei valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \cos n^\alpha)$ converge? $\boxed{a}$ $\alpha > \frac{1}{2}$; $\boxed{b}$ $\alpha > 1$; $\boxed{c}$ $\alpha < -1$; ☒ $\alpha < -\frac{1}{2}$.

5. Se $z \in C$ è la soluzione di $(z-1)(\bar{z}+1) = i$ allora $\boxed{a}$ z è reale e non zero; $\boxed{b}$ z è immaginario puro e non zero; ☒ $|z| = 1$; $\boxed{d}$ l'argomento di z è $\pi/4$.

6. $\int_0^{\pi/4} x^2 \sin(2x) dx =$ $\boxed{a}$ $\frac{1}{8}(\pi^2 - 4)$; $\boxed{b}$ $-\frac{\pi}{4}$; $\boxed{c}$ $\frac{1}{32}(\pi^2 - 8)$; ☒ $\frac{1}{8}(\pi - 2)$.

7. Quale delle seguenti è la definizione di $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ $\boxed{a}$ per ogni $\epsilon > 0$ esiste $M = M(\epsilon)$ tale che se $x > M$ allora $|f(x)| < \epsilon$; $\boxed{b}$ per ogni K esiste $M = M(K)$ tale che se $x > M$ allora $f(x) > K$; $\boxed{c}$ per ogni K esiste $M = M(K)$ tale che se $x > M$ allora $f(x) < K$; ☒ per ogni K esiste $\delta = \delta(K)$ tale che se $0 < |x| < \delta$ allora $f(x) > K$.

8. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x + x^2 + e^{-x}}{x + \frac{2}{x}} =$ $\boxed{a}$ 0; $\boxed{b}$ -1; ☒ $+\infty$; $\boxed{d}$ $-\infty$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello		**12 settembre 2011**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Corso di laurea:		Test |Es1 |Es2 |Es3 |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

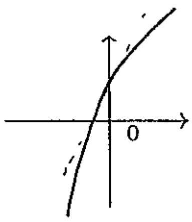
1. Quale è l'insieme dei valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\cos n^\alpha)$ converge? $\boxed{a}$ $\alpha > \frac{1}{2}$; $\boxed{b}$ $\alpha > 1$; $\boxed{c}$ $\alpha < -1$; ☒ $\alpha < -\frac{1}{2}$.

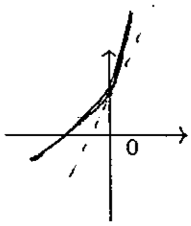
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 2^{-x} + \sin(x^2)}{e^{-x} - x^3} =$ $\boxed{a}$ 0; ☒ -1; $\boxed{c}$ $+\infty$; $\boxed{d}$ $-\infty$.

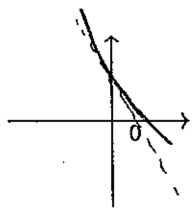
3. Se $z \in C$ è la soluzione di $(z-1)(\bar{z}+1) = 3+4i$ allora $\boxed{a}$ z è reale e non zero; ☒ z è immaginario puro e non zero; $\boxed{c}$ $|z| = 1$; $\boxed{d}$ l'argomento di z è $\pi/4$.

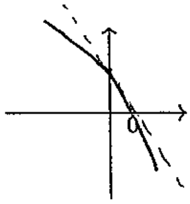
4. Se $f : R\setminus\{0\} \to R$ è una funzione derivabile, quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxed{a}$ Se $f'(x) > 0$ per tutti gli $x \in R\setminus\{0\}$ allora f è crescente; ☒ Se f è crescente allora $\lim_{x\to 0^-} f(x) < +\infty$; $\boxed{c}$ f ha un asintoto verticale nel punto $x = 0$; $\boxed{d}$ Se f ha un asintoto verticale nel punto $x = 0$ allora $f'(x)$ ha sempre lo stesso segno.

5. La soluzione in un intorno di $x = 0$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = e^y(y+2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ è

$\boxed{a}$ 

; ☒ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

6. Quale delle seguenti è la definizione di $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ $\boxed{a}$ per ogni $\epsilon > 0$ esiste $M = M(\epsilon)$ tale che se $x > M$ allora $|f(x)| < \epsilon$; $\boxed{b}$ per ogni K esiste $M = M(K)$ tale che se $x > M$ allora $f(x) > K$; $\boxed{c}$ per ogni K esiste $M = M(K)$ tale che se $x > M$ allora $f(x) < K$; ☒ per ogni K esiste $\delta = \delta(K)$ tale che se $0 < |x| < \delta$ allora $f(x) > K$.

7. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x^2 \sin(2x)dx =$ $\boxed{a}$ $\frac{1}{8}(\pi^2-4)$; $\boxed{b}$ $-\frac{\pi}{4}$; $\boxed{c}$ $\frac{1}{32}(\pi^2-8)$; ☒ $\frac{1}{8}(\pi-2)$.

8. Per quali valori dei parametri $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\beta \in \mathbf{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2\alpha x}-1}{x} & \text{per } x > 0 \\ \cos x + e^x - 2\beta x & \text{per } x \le 0 \end{cases}$$

è continua e derivabile in $x = 0$?
$\boxed{a}$ $\alpha = 1, \beta = -1$; $\boxed{b}$ $\alpha = -1, \beta = -\frac{3}{2}$; ☒ $\alpha = 1, \beta = -\frac{1}{2}$; $\boxed{d}$ $\alpha = -1, \beta = 1$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello		12 settembre 2011
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Corso di laurea:		Test | Es1 | Es2 | Es3 |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Per quali valori dei parametri $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\beta \in \mathbf{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\alpha x)}{x} & \text{per } x > 0 \\ x^2 - \beta e^{-x} + \sin x & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

è continua e derivabile in $x = 0$?
$\boxed{a}$ $\alpha = 1, \beta = -\frac{1}{2}$; $\boxed{b}$ $\alpha = -1, \beta = 1$; ☒ $\alpha = 1, \beta = -1$; $\boxed{d}$ $\alpha = -1, \beta = -\frac{3}{2}$.

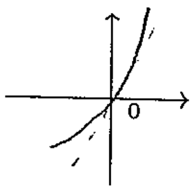
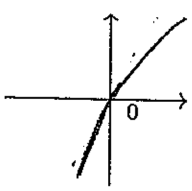
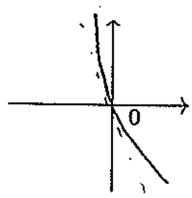
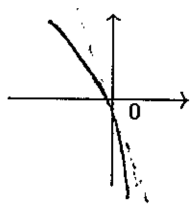
2. Quale è l'insieme dei valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{1/n^\alpha} - 1\right)$ converge? $\boxed{a}$ $\alpha < -1$; $\boxed{b}$ $\alpha < -\frac{1}{2}$; $\boxed{c}$ $\alpha > \frac{1}{2}$; ☒ $\alpha > 1$.

3. Quale delle seguenti è la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ $\boxed{a}$ per ogni K esiste $M = M(K)$ tale che se $x > M$ allora $f(x) < K$; $\boxed{b}$ per ogni K esiste $\delta = \delta(K)$ tale che se $0 < |x| < \delta$ allora $f(x) > K$; ☒ per ogni $\epsilon > 0$ esiste $M = M(\epsilon)$ tale che se $x > M$ allora $|f(x)| < \epsilon$; $\boxed{d}$ per ogni K esiste $M = M(K)$ tale che se $x > M$ allora $f(x) > K$.

4. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x + x^2 + e^{-x}}{x + \frac{2}{x}} =$ ☒ $+\infty$; $\boxed{b}$ $-\infty$; $\boxed{c}$ 0; $\boxed{d}$ −1.

5. $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2x) dx =$ $\boxed{a}$ $\frac{1}{32}(\pi^2 - 8)$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{8}(\pi - 2)$; ☒ $\frac{1}{8}(\pi^2 - 4)$; $\boxed{d}$ $-\frac{\pi}{4}$.

6. La soluzione in un intorno di $x = 0$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = e^y(y+2) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ è

☒ 
; $\boxed{b}$ 
; $\boxed{c}$ 
; $\boxed{d}$ 
.

7. Se $z \in C$ è la soluzione di $(z-1)(\bar{z}+1) = i$ allora ☒ $|z| = 1$; $\boxed{b}$ l'argomento di z è $\pi/4$; $\boxed{c}$ z è reale e non zero; $\boxed{d}$ z è immaginario puro e non zero.

8. Se $f : R \setminus \{0\} \to R$ è una funzione derivabile, quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxed{a}$ f ha un asintoto verticale nel punto $x = 0$; $\boxed{b}$ Se f ha un asintoto verticale nel punto $x = 0$ allora $f'(x)$ ha sempre lo stesso segno; $\boxed{c}$ Se $f'(x) > 0$ per tutti gli $x \in R \setminus \{0\}$ allora f è crescente; ☒ Se f è crescente allora $\lim_{x\to 0^-} f(x) < +\infty$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello		12 settembre 2011
Cognome:	Nome:	Matricola:
Corso di laurea:		Test | Es1 | Es2 | Es3

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x - 2x^2 + e^x}{3^x + 3^{-x}} =$ $\boxed{a}$ $+\infty$; $\boxed{b}$ $-\infty$; $\boxtimes$ 0; $\boxed{d}$ -1.

2. Se $f : R\setminus\{0\} \to R$ è una funzione derivabile, quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxed{a}$ f ha un asintoto verticale nel punto $x = 0$; $\boxed{b}$ Se f ha un asintoto verticale nel punto $x = 0$ allora $f'(x)$ ha sempre lo stesso segno; $\boxed{c}$ Se $f'(x) > 0$ per tutti gli $x \in R\setminus\{0\}$ allora f è crescente; $\boxtimes$ Se f è crescente allora $\lim_{x\to 0^-} f(x) < +\infty$.

3. $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2x)dx =$ $\boxed{a}$ $\frac{1}{32}(\pi^2 - 8)$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{8}(\pi - 2)$; $\boxtimes$ $\frac{1}{8}(\pi^2 - 4)$; $\boxed{d}$ $-\frac{\pi}{4}$.

4. Per quali valori dei parametri $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\beta \in \mathbf{R}$ la funzione

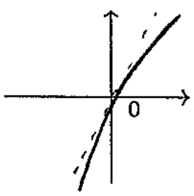
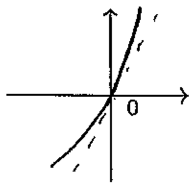
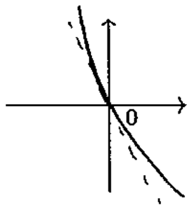
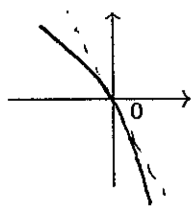
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+\alpha x)}{x} & \text{per } x > 0,\ x \text{ vicino a } 0 \\ x^2 + \beta\sin x - e^{-x} & \text{per } x \le 0 \end{cases}$$

è continua e derivabile in $x = 0$?
$\boxed{a}$ $\alpha = 1, \beta = -\frac{1}{2}$; $\boxed{b}$ $\alpha = -1, \beta = 1$; $\boxed{c}$ $\alpha = 1, \beta = -1$; $\boxtimes$ $\alpha = -1, \beta = -\frac{3}{2}$.

5. Quale delle seguenti è la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ $\boxed{a}$ per ogni K esiste $M = M(K)$ tale che se $x > M$ allora $f(x) < K$; $\boxed{b}$ per ogni K esiste $\delta = \delta(K)$ tale che se $0 < |x| < \delta$ allora $f(x) > K$; $\boxtimes$ per ogni $\epsilon > 0$ esiste $M = M(\epsilon)$ tale che se $x > M$ allora $|f(x)| < \epsilon$; $\boxed{d}$ per ogni K esiste $M = M(K)$ tale che se $x > M$ allora $f(x) > K$.

6. Se $z \in C$ è la soluzione di $(z-1)(\bar{z}+1) = 1$ allora $\boxed{a}$ $|z| = 1$; $\boxed{b}$ l'argomento di z è $\pi/4$; $\boxtimes$ z è reale e non zero; $\boxed{d}$ z è immaginario puro e non zero.

7. La soluzione in un intorno di $x = 0$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = e^y(y+2) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ è

$\boxed{a}$  ; $\boxtimes$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxed{d}$  .

8. Quale è l'insieme dei valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{1/n^\alpha} - 1\right)$ converge? $\boxed{a}$ $\alpha < -1$; $\boxed{b}$ $\alpha < -\frac{1}{2}$; $\boxed{c}$ $\alpha > \frac{1}{2}$; $\boxtimes$ $\alpha > 1$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello		12 settembre 2011
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Corso di laurea:		Test | Es1 | Es2 | Es3 |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. Quale delle seguenti è la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ $\boxed{a}$ per ogni K esiste $M = M(K)$ tale che se $x > M$ allora $f(x) > K$; $\boxtimes$ per ogni K esiste $M = M(K)$ tale che se $x > M$ allora $f(x) < K$; $\boxed{c}$ per ogni K esiste $\delta = \delta(K)$ tale che se $0 < |x| < \delta$ allora $f(x) > K$; $\boxed{d}$ per ogni $\epsilon > 0$ esiste $M = M(\epsilon)$ tale che se $x > M$ allora $|f(x)| < \epsilon$.

2. Se $z \in C$ è la soluzione di $(z-1)(\bar{z}+1) = i$ allora $\boxed{a}$ z è immaginario puro e non zero; $\boxtimes$ $|z| = 1$; $\boxed{c}$ l'argomento di z è $\pi/4$; $\boxed{d}$ z è reale e non zero.

3. Se $f : R\setminus\{0\} \to R$ è una funzione derivabile, quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxtimes$ Se f è crescente allora $\lim_{x\to 0^-} f(x) < +\infty$; $\boxed{b}$ f ha un asintoto verticale nel punto $x = 0$; $\boxed{c}$ Se f ha un asintoto verticale nel punto $x = 0$ allora $f'(x)$ ha sempre lo stesso segno; $\boxed{d}$ Se $f'(x) > 0$ per tutti gli $x \in R\setminus\{0\}$ allora f è crescente.

4. $\int_0^{\pi/4} x^2 \cos(2x)dx =$ $\boxed{a}$ $-\frac{\pi}{4}$; $\boxtimes$ $\frac{1}{32}(\pi^2 - 8)$; $\boxed{c}$ $\frac{1}{8}(\pi - 2)$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{8}(\pi^2 - 4)$.

5. Quale è l'insieme dei valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \cos(\frac{1}{n^\alpha})\right)$ converge?
$\boxed{a}$ $\alpha > 1$; $\boxed{b}$ $\alpha < -1$; $\boxed{c}$ $\alpha < -\frac{1}{2}$; $\boxtimes$ $\alpha > \frac{1}{2}$.

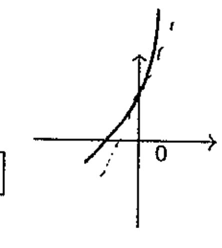
6. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^3 + e^x - \cos^2 x}{\frac{3}{x^2} - x^2} =$ $\boxed{a}$ -1; $\boxed{b}$ $+\infty$; $\boxtimes$ $-\infty$; $\boxed{d}$ 0.

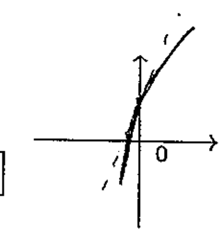
7. Per quali valori dei parametri $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\beta \in \mathbf{R}$ la funzione

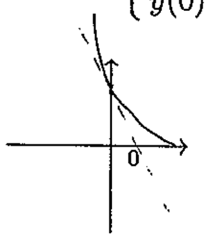
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan(\alpha x)}{x} & \text{per } x > 0,\ x \text{ vicino a } 0 \\ -\beta e^x + \sin x + 2x^2 & \text{per } x \le 0 \end{cases}$$

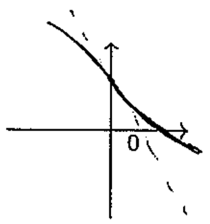
è continua e derivabile in $x = 0$?
$\boxed{a}$ $\alpha = -1, \beta = -\frac{3}{2}$; $\boxed{b}$ $\alpha = 1, \beta = -\frac{1}{2}$; $\boxtimes$ $\alpha = -1, \beta = 1$; $\boxed{d}$ $\alpha = 1, \beta = -1$.

8. La soluzione in un intorno di $x = 0$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = e^y(y-2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ è

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

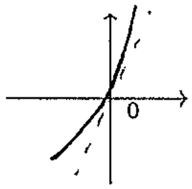
; $\boxtimes$ 

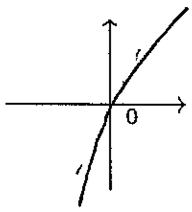
.

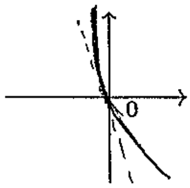
ANALISI MATEMATICA 1 - Quinto appello		12 settembre 2011
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**
Corso di laurea:		Test | Es1 | Es2 | Es3 |

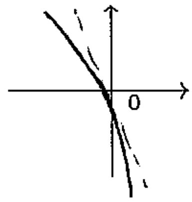
- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. La soluzione in un intorno di $x = 0$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = e^y(y-2) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ è

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxtimes$ 

; $\boxed{d}$ 

.

2. Quale delle seguenti è la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\boxed{a}$ per ogni K esiste $\delta = \delta(K)$ tale che se $0 < |x| < \delta$ allora $f(x) > K$; $\boxed{b}$ per ogni $\epsilon > 0$ esiste $M = M(\epsilon)$ tale che se $x > M$ allora $|f(x)| < \epsilon$; $\boxtimes$ per ogni K esiste $M = M(K)$ tale che se $x > M$ allora $f(x) > K$; $\boxed{d}$ per ogni K esiste $M = M(K)$ tale che se $x > M$ allora $f(x) < K$.

3. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x - 2x^2 + e^x}{3^x + 3^{-x}} =$ $\boxed{a}$ $-\infty$; $\boxtimes$ 0; $\boxed{c}$ -1; $\boxed{d}$ $+\infty$.

4. Se $z \in C$ è la soluzione di $(z-1)(\bar{z}+1) = 1$ allora $\boxed{a}$ l'argomento di z è $\pi/4$; $\boxtimes$ z è reale e non zero; $\boxed{c}$ z è immaginario puro e non zero; $\boxed{d}$ $|z| = 1$.

5. Per quali valori dei parametri $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\beta \in \mathbf{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+\alpha x)}{x} & \text{per } x > 0,\ x \text{ vicino a } 0 \\ x^2 + \beta \sin x - e^{-x} & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

è continua e derivabile in $x = 0$?
$\boxed{a}$ $\alpha = -1, \beta = 1$; $\boxed{b}$ $\alpha = 1, \beta = -1$; $\boxtimes$ $\alpha = -1, \beta = -\frac{3}{2}$; $\boxed{d}$ $\alpha = 1, \beta = -\frac{1}{2}$.

6. Quale è l'insieme dei valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{n^\alpha} - 1\right)$ converge? $\boxed{a}$ $\alpha < -\frac{1}{2}$; $\boxed{b}$ $\alpha > \frac{1}{2}$; $\boxed{c}$ $\alpha > 1$; $\boxtimes$ $\alpha < -1$.

7. Se $f : R \setminus \{0\} \to R$ è una funzione derivabile, quale delle seguenti affermazioni è sempre vera? $\boxed{a}$ Se f ha un asintoto verticale nel punto $x = 0$ allora $f'(x)$ ha sempre lo stesso segno; $\boxed{b}$ Se $f'(x) > 0$ per tutti gli $x \in R \setminus \{0\}$ allora f è crescente; $\boxtimes$ Se f è crescente allora $\lim_{x\to 0^-} f(x) < +\infty$; $\boxed{d}$ f ha un asintoto verticale nel punto $x = 0$.

8. $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos(2x) dx =$ $\boxed{a}$ $\frac{1}{8}(\pi - 2)$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{8}(\pi^2 - 4)$; $\boxtimes$ $-\frac{\pi}{4}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{32}(\pi^2 - 8)$.

ANALISI MATEMATICA 1	12 settembre 2011

1. (6 punti) Studiate la funzione

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{-\frac{1}{x+1}}, & \text{per } x \neq -1 \\ 0 & \text{per } x = -1. \end{cases}$$

e disegnatene il grafico (indicando massimi e minimi ed eventuali asintoti; non è richiesto lo studio della derivata seconda).

I limiti di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ e $x \to -1^{\pm}$ sono:

$$\lim_{x\to+\infty} (x-1)\underbrace{e^{-1/x+1}}_{\downarrow\, 1} = +\infty \ ; \ \lim_{x\to-\infty} (x-1)\underbrace{e^{-1/x+1}}_{\downarrow\, 1} = -\infty \ ; \ \lim_{x\to-1^-} (x-1)e^{\overbrace{-1/x+1}^{+\infty}} = -\infty;$$

$\hookrightarrow$ [$x=-1$ asintoto verticale per $x\to -1^-$]

$$\lim_{x\to-1^+} (x-1)e^{\overbrace{-1/x+1}^{-\infty}} = 0^- \text{ (cioè dalla parte negativa).}$$

Poi si ha $f(0) = -1/e$, $f(1) = 0$, $f(x) > 0$ per $x > 1$ e $f(x) < 0$ per $x < 1$.

Per cercare asintoti obliqui si deve calcolare

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{x} e^{-1/x+1} = 1 \ , \ \lim_{x\to\pm\infty} [(x-1)e^{-1/x+1} - x] = \lim_{x\to\pm\infty} [x(e^{-1/x+1} - 1) - e^{-1/x+1}] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left\{ x \cdot \left(-\frac{1}{x+1}\right) \underbrace{\frac{e^{-1/x+1}-1}{-1/x+1}}_{\downarrow\, 1} - 1 \right\} = -1-1 = -2.$$

[poiché è come $\frac{e^k-1}{k}$ per $k \to 0$, $k = -1/x+1$.

Dunque $y = x-2$ è asintoto obliquo sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

La derivata prima vale

$$f'(x) = e^{-1/x+1} + (x-1)e^{-1/x+1} \frac{1}{(x+1)^2} = e^{-1/x+1} \frac{(x+1)^2 + x - 1}{(x+1)^2} = e^{-1/x+1} \frac{x(x+3)}{(x+1)^2},$$

e dunque f cresce per $x < -3$ e $x > 0$, decresce per $-3 < x < 0$.

In conclusione, f non ha massimo assoluto né minimo assoluto, mentre -3 è punto di massimo relativo, con valore $f(-3) = -4\sqrt{e}$, 0 è punto di minimo relativo, con valore $f(0) = -1/e$, -1 è punto di massimo relativo, con valore $f(-1) = 0$.

Si può anche vedere che

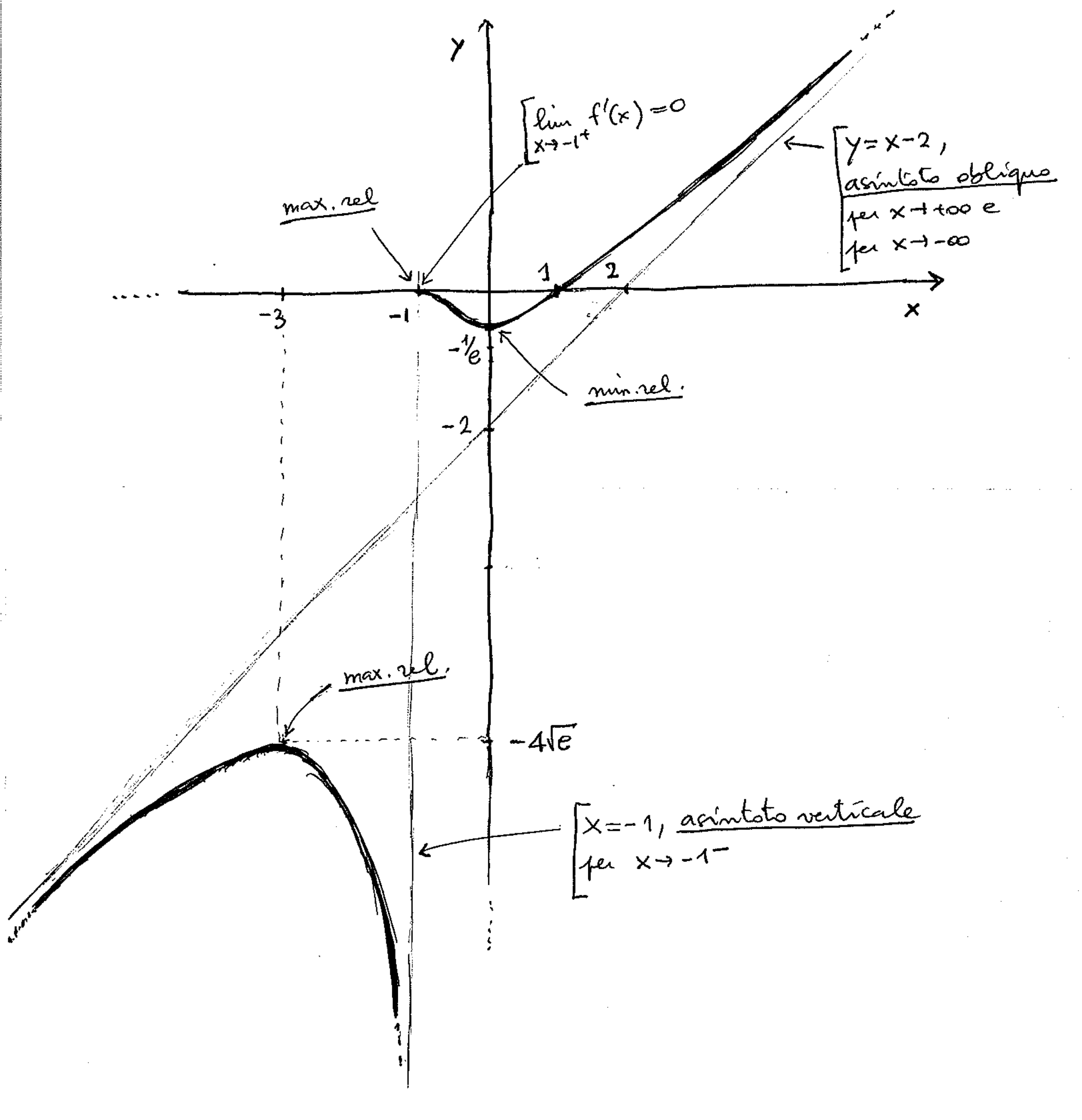
$$\lim_{x\to-1^+} f'(x) = -2 \lim_{x\to-1^+} \frac{e^{-1/x+1}}{(x+1)^2} \underset{t = 1/x+1}{=} -2 \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0.$$

1. (6 punti) Studiate la funzione

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{-\frac{1}{x+1}}, & \text{per } x \neq -1 \\ 0 & \text{per } x = -1. \end{cases}$$

e disegnatene il grafico (indicando massimi e minimi ed eventuali asintoti; non è richiesto lo studio della derivata seconda).

Grafico:



ANALISI MATEMATICA 1	12 settembre 2011

2. (6 punti) Risolvete il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 2xe^{x+2y}\,, \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Verificate inoltre se è possibile calcolare il limite della soluzione per $x \to +\infty$, e se è possibile dite quanto vale.

È un'equazione non lineare del 1° ordine a variabili separabili.
Si ha

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^x e^{2y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{e^{2y}} = 2xe^x\,dx$$

e integrando

$$\int \frac{dy}{e^{2y}} = -\frac{1}{2}e^{-2y} + c_1\,, \quad \int 2xe^x dx = 2e^x x - \int 2e^x dx = 2e^x(x-1) + c_2\,,$$

cioè ($c = c_2 - c_1 \ldots$)

$$-\frac{1}{2}e^{-2y} = 2e^x(x-1) + c\,.$$

Dal dato di Cauchy si ha $-\frac{1}{2}e^{-2} = -2 + c$, cioè $c = 2 - \frac{1}{2e^2}$.

Quindi

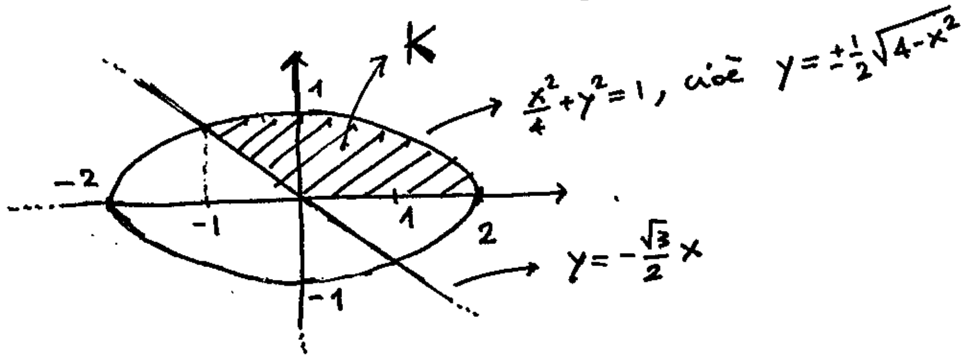
$$-\frac{1}{2}e^{-2y} = 2e^x(x-1) + 2 - \frac{1}{2e^2} \Rightarrow e^{-2y} = -4e^x(x-1) - 4 + \frac{1}{e^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2y = \log\left(-4e^x(x-1) - 4 + \frac{1}{e^2}\right) \Rightarrow \boxed{y(x) = -\frac{1}{2}\log\left(-4e^x(x-1) - 4 + \frac{1}{e^2}\right)}.$$

Per $x \to +\infty$ si ha $-4e^x(x-1) - 4 + \frac{1}{e^2} \to -\infty$, dunque il logaritmo non ha più significato, e non è possibile calcolare il limite.

3. (6 punti) Sia K la regione interna all'ellisse $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$, contenuta nel semipiano $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 0\}$ e al di sopra della retta $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x\}$. Calcolate l'area di K.

La figura è



Intersecando retta ed ellisse si ha

$$1 = \frac{x^2}{4} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}x^2 = x^2 \Rightarrow x = \pm 1.$$

L'area è quindi data da:

$$\text{Area} = \int_{-1}^{0}\left[\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]dx + \int_{0}^{2}\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\int_{-\pi/6}^{\pi/2}\sqrt{4-4\,\text{sen}^2 t}\;\cancel{2}\cos t\,dt - \frac{\sqrt{3}}{4} = 2\int_{-\pi/6}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$x = 2\,\text{sen}\,t$
$dx = 2\cos t\,dt$
$x=-1 \to t = -\pi/6$
$x = 2 \to t = \pi/2$

La primitiva di $\cos^2 t$ si fa per parti (è ben noto...):

$$\int \cos^2 t\,dt = \int \cos t \cos t\,dt = \text{sen}\,t\cos t + \int \text{sen}^2 t\,dt = \text{sen}\,t \cos t + \int (1-\cos^2 t)\,dt =$$

$$= \text{sen}\,t\cos t + t - \int \cos^2 t\,dt, \quad \text{quindi} \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}(\text{sen}\,t\cos t + t) + c.$$

Quindi

$$2\int_{-\pi/6}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(\text{sen}\,t\cos t + t)\Big|_{-\pi/6}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

In conclusione, l'area è $\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi}{3}$.