COGNOME [ ] NOME [ ] Matr. [ ]

Analisi Matematica II (EA)

13 febbraio 2015

Esercizio 1 (7 punti). Si calcoli l'integrale curvilineo $\int_\beta \vec{v}\cdot d\vec{l}$, ove $\vec{v} = (y-z, z+x, x+y)$ e la curva $\vec{\beta}$ ha come sostegno due insiemi: il segmento che va dal punto $(0,1,0)$ al punto $(1,0,1)$ e la parabola contenuta nel piano (x,z) e di equazione $z = 2x - x^2$, percorsa dal punto $(1,0,1)$ al punto $(0,0,0)$.

Risultato: $\int_\beta \vec{v}\cdot d\vec{l} = 1/3$.

Calcoli:

Il segmento si può parametrizzare come $\vec{\beta}_1(t) = [(1,0,1)-(0,1,0)]t + (0,1,0) = (1,-1,1)t + (0,1,0) = (t, 1-t, t)$, $t\in[0,1]$.

La parabola si può parametrizzare come $\vec{\beta}_2(x) = (x, 0, 2x-x^2)$, $x\in[0,1]$, che però ha verso di percorrenza opposto a quello richiesto.

Dunque l'integrale vale (essendo $\vec{\beta}_1'(t) = (1,-1,1)$, $\vec{\beta}_2'(x) = (1,0,2-2x)$):

$$\int_\beta \vec{v}\cdot d\vec{l} = \int_0^1 (1-2t, 2t, 1)\cdot(1,-1,1)\,dt - \int_0^1 (x^2-2x, 3x-x^2, x)\cdot(1,0,2-2x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 (2-4t)\,dt - \int_0^1 (-x^2)\,dx = 2 - 2t^2\Big|_0^1 + \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Esercizio 2 (7 punti). Si determinino il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ sull'insieme $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z - 1 - x^2 - y^2 = 0, z \leq 2\}$.

Risultati: $\boxed{\max f = 14, \text{ in } (0, \pm 1, 2); \ \min f = 3, \text{ in } (0,0,1).}$

Calcoli:

Possiamo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
Chiamando $\phi(x,y,z) = z - 1 - x^2 - y^2$, imponendo il parallelismo fra i gradienti di f e di ϕ si ha:

$$\begin{cases} 2x = \lambda(-2x) \\ 4y = \lambda(-2y) \\ 6z = \lambda \cdot 1 \end{cases}$$

$2x = \lambda(-2x) \to \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \lambda = -1 \to z = -1/6 \end{array}\right.$

$4y = \lambda(-2y) \to \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ \lambda = -2 \to z = -1/3 \end{array}\right.$

$z = -1/6$, $z = -1/3$ $\to$ non rispetta il vincolo $z = 1 + x^2 + y^2 > 0$.

Dunque si è trovato $x = 0$, $y = 0$ che danno, dal vincolo, $z = 1$ (e $\lambda = 6$). Questo punto <u>non</u> è sul bordo di Σ: questo bordo è infatti ottenuto per $z = 2$, cioè $x^2 + y^2 = 1$.
Una sua parametrizzazione è data da $(\cos\theta, \sin\theta, 2)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.
La funzione f sul bordo di Σ dunque vale

$$h(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta, 2) = \cos^2\theta + 2\sin^2\theta + 12 =$$
$$= \sin^2\theta + 13.$$

Si ha $h'(\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$, che si annulla in $(0, 2\pi)$ per $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$, $\theta = \frac{3}{2}\pi$. Quindi si devono confrontare:

$f(0,0,1) = 3$; $\underbrace{f(0,1,2)}_{\theta = \pi/2} = 14$; $\underbrace{f(-1,0,2)}_{\theta = \pi} = 13$; $\underbrace{f(0,-1,2)}_{\theta = \frac{3}{2}\pi} = 14$;

$\underbrace{f(1,0,2)}_{\theta = 0,\ \theta = 2\pi} = 13$.

In conclusione il massimo di f è 14, assunto in $(0, \pm 1, 2)$; il minimo è 3, assunto in $(0,0,1)$.

Esercizio 3 (8 punti). Si determini per quale valore del parametro $\kappa > 0$ il volume dell'insieme $Q = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, z \geq \sqrt{x^2+y^2}, z \leq 1 - \kappa\sqrt{x^2+y^2}\}$ è uguale a $\frac{\pi}{9}$.

Risultato: $\boxed{\kappa = \sqrt{3} - 1.}$

Calcoli:

Intersecando $z = \sqrt{x^2+y^2}$ $\big(\underbrace{\text{cono rivolto verso l'alto}}_{\text{di vertice } (0,0,0)}\big)$ e $z = 1 - \kappa\sqrt{x^2+y^2}$ (cono rivolto verso il basso, di vertice $(0,0,1)$) si ha

$$\sqrt{x^2+y^2} = 1 - \kappa\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{1+\kappa}.$$

Inoltre si ha $\sqrt{x^2+y^2} \leq 1 - \kappa\sqrt{x^2+y^2}$ per $\sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{1}{1+\kappa}$, cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $\frac{1}{1+\kappa}$ (chiamiamolo $C(\underline{0}, 1/1+\kappa)$).

Si ha

$$\operatorname{vol} Q = \iint_{C(\underline{0}, 1/1+\kappa)} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1-\kappa\sqrt{x^2+y^2}} dz \right) dx\,dy \overset{\text{polari...}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/1+\kappa} \underbrace{\rho}_{\text{jacobiano!}}(1-\kappa\rho-\rho)\,d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^{1/1+\kappa} (\rho - (1+\kappa)\rho^2)\,d\rho = 2\pi \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{1+\kappa}{3}\rho^3 \right)\Big|_0^{1/1+\kappa} =$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2}\frac{1}{(1+\kappa)^2} - \frac{1+\kappa}{3}\frac{1}{(1+\kappa)^{3}} \right) = 2\pi \frac{1}{6}\frac{1}{(1+\kappa)^2} =$$

$$= \frac{\pi}{3}\frac{1}{(1+\kappa)^2}.$$

Questo è uguale a $\frac{\pi}{9}$ se $(1+\kappa)^2 = 3$, cioè $\kappa = \sqrt{3} - 1$.

Esercizio 4 (8 punti). Si calcoli $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ (il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S), ove

$$\vec{F} = (1, 1, z + y^2) \quad , \quad S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1, z \geq 0\right\}$$

(si scelga la normale orientata verso l'alto).

Risultato: $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \frac{105}{4}\pi.$

Calcoli:

La superficie può essere parametrizzata come $\vec{r}(x,y) = \left(x, y, \sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}}\right)$, con $(x,y)\in C(\vec{0},3)$ (cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 3).

Allora il vettore normale è dato da $\vec{N} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}$, cioè

$$\vec{N} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -x/9\sqrt{1-x^2/9-y^2/9} \\ 0 & 1 & -y/9\sqrt{1-x^2/9-y^2/9}\end{pmatrix} = \left(\frac{x}{9\sqrt{1-x^2/9-y^2/9}}, \frac{y}{9\sqrt{1-x^2/9-y^2/9}}, 1\right),$$

che punta verso l'alto.

Quindi il flusso richiesto è

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{C(\vec{0},3)} \left(1,1,y^2+\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}}\right)\cdot\left(\frac{x}{9\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}}}, \frac{y}{9\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}}}, 1\right)dx\,dy =$$

polari: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta, & \theta\in[0,2\pi] \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, & \rho\in[0,3]\end{cases}$

$$= \iint_{C(\vec{0},3)} \left(\frac{x+y}{9\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}}} + y^2 + \sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}}\right)dx\,dy =$$

jacobiano!

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \rho\left(\frac{\rho(\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta)}{9\sqrt{1-\rho^2/9}} + \rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta + \sqrt{1-\rho^2/9}\right)d\rho =$$

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2\theta\,d\theta = \pi \\ \int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta = 0 = \int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta \end{cases}$$

$$= \pi\int_0^3 \rho^3\,d\rho + 2\pi\int_0^3 \frac{\rho}{3}\sqrt{9-\rho^2}\,d\rho = \frac{81}{4}\pi + 2\pi\frac{1}{6}\left(-(9-\rho^2)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\right)\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{81}{4}\pi + \frac{2\pi}{9}9^{3/2} = \frac{81}{4}\pi + 6\pi = \frac{105}{4}\pi.$$

Esercizio 4 (8 punti). Si calcoli $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ (il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S), ove

$$\vec{F} = (1, 1, z + y^2) \quad , \quad S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1, z \geq 0\right\}$$

(si scelga la normale orientata verso l'alto).

Risultato:

Calcoli:

Si può anche utilizzare il teorema della divergenza. Si ha $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1$, e dunque

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz - \iint_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \operatorname{vol} V - \iint_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS,$$

ove

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\right\},\ S_0 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 9,\ z = 0\right\}.$$

[Si noti che su S_0 si ha la normale unitaria uscente $\vec{n} = (0,0,-1)$.]

Quindi, essendo $\vec{F}$ su S_0 dato da $(1,1,y^2)$, si ha:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 3 \cdot 3 - \iint_{C(\vec{0},3)} (1,1,y^2) \cdot (0,0-1)\, dx\, dy =$$

$$= 6\pi + \iint_{C(\vec{0},3)} y^2\, dx\, dy = 6\pi + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \rho\, \rho^2 \sin^2\theta\, d\rho =$$

$$= 6\pi + \pi \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^3 = 6\pi + \frac{81}{4}\pi = \frac{105}{4}\pi.$$