ANALISI MATEMATICA 1 - Terzo appello	14 giugno 2016

1. **(6 punti)** Studiate le proprietà della funzione $f(x) = |x+1|e^{-x^2-2}$. In particolare trovate dominio, limiti, continuità, derivabilità, crescenza e decrescenza, punti e valori di massimo e di minimo relativo, punti e valori di massimo e di minimo assoluto, e tracciate qualitativamente il grafico. [Non è richiesto lo studio di convessità/concavità.]

La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$, ed è continua in $\mathbb{R}$ come prodotto di funzioni continue. Si ha $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, e

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-x^2-2} & \text{per } x \geq -1 \\ -(x+1)e^{-x^2-2} & \text{per } x \leq -1, \end{cases}$$

$f(0) = e^{-2}$, $f(-1) = 0$.

Dunque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+1)e^{-x^2-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{e^{x^2}} e^{-2} = 0$ (perché l'esponenziale diverge più rapidamente dei polinomi), e ancora

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -(x+1)e^{-x^2-2} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{x+1}{e^{x^2}} e^{-2} = 0$ (stesso motivo...).

Facciamo la derivata per $x > 1$: $f'(x) = e^{-x^2-2} + (x+1)e^{-x^2-2}(-2x) =$
$= (-2x^2-2x+1)e^{-x^2-2}$. Il segno è dettato da quello di $-2x^2-2x+1$, polinomio le cui radici sono

$$-2x^2-2x+1 = 0 \rightarrow 2x^2+2x-1 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \mp \sqrt{1+2}}{2} = \frac{-1\mp\sqrt{3}}{2}.$$

Si ha $\frac{-1-\sqrt{3}}{2} < -1 < \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, dunque f cresce per $-1 < x < \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ e decresce per $x > \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Per $x < -1$ la derivata di f è opposta alla derivata di f per $x > -1$, e dunque $f'(x) = (2x^2+2x-1)e^{-x^2-2}$, e f cresce per $x < \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ e decresce per $\frac{-1-\sqrt{3}}{2} < x < -1$.

Siccome $\lim_{x\to-1^+} f'(x) = \lim_{x\to-1^+} (-2x^2-2x+1)e^{-x^2-2} = e^{-3}$ e $\lim_{x\to-1^-} f'(x) = -e^{-3}$, la funzione f <u>non</u> è derivabile in $x=-1$.

Dalla crescenza e decrescenza vediamo che $x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ e $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ sono due punti di massimo relativo, mentre $x=-1$ è punto di minimo relativo. Siccome $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e $f(-1) = 0$, -1 è punto di minimo <u>assoluto</u>.

Valutando $f\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$ e $f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$ si ha (essendo $\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1+3+2\sqrt{3}}{4}$, $\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1+3-2\sqrt{3}}{4}$)

$$f\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) = \left|\frac{-1-\sqrt{3}}{2}+1\right| e^{-(1+\sqrt{3}/2)-2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} e^{-3-\sqrt{3}/2}$$

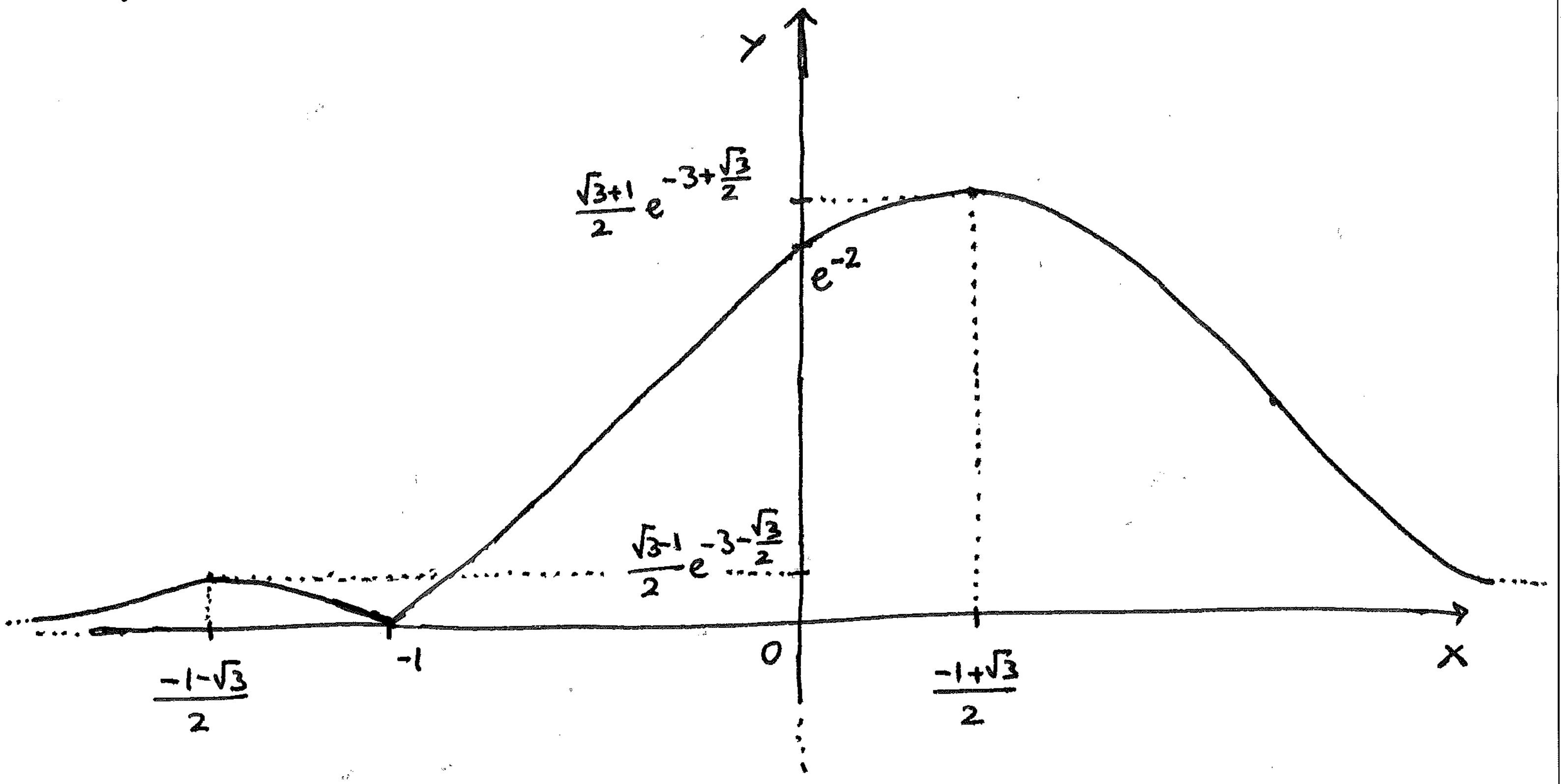
$$f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) = \left|\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+1\right| e^{-(1-\sqrt{3}/2)-2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} e^{-3+\sqrt{3}/2} > \frac{\sqrt{3}-1}{2} e^{-3-\sqrt{3}/2},$$

quindi $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ è punto di massimo <u>assoluto</u>.

ANALISI MATEMATICA 1 - Terzo appello	14 giugno 2016

1. **(6 punti)** Studiate le proprietà della funzione $f(x) = |x+1|e^{-x^2-2}$. In particolare trovate dominio, limiti, continuità, derivabilità, crescenza e decrescenza, punti e valori di massimo e di minimo relativo, punti e valori di massimo e di minimo assoluto, e tracciate qualitativamente il grafico. [Non è richiesto lo studio di convessità/concavità.]

Grafico (scala in Y amplificata rispetto alla scala in X).



ANALISI MATEMATICA 1 - Terzo appello	14 giugno 2016

2. **(6 punti)** Sia $D = \{(x,y) \,|\, 0 \le x \le \frac{\pi}{3}\,,\ 0 \le y \le \sin(3x)\}$. Siano V_X e V_Y i volumi dei solidi ottenuti ruotando D attorno agli assi X e Y, rispettivamente. Determinate il valore $a > 0$ per cui $aV_X = V_Y$.

Il volume V_X è dato da $\pi \int_0^{\pi/3} (\sin(3x))^2\,dx$, cioè

$$V_X = \pi \int_0^{\pi/3} \sin^2(3x)\,dx \underset{\substack{t=3x,\ x=\frac{1}{3}t \\ dx=\frac{1}{3}dt}}{=} \pi \int_0^{\pi} \sin^2 t\,\frac{1}{3}\,dt \underset{\text{per parti}}{=} \frac{\pi}{3}\left[(-\cos t \sin t)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos^2 t\,dt\right] =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[0 + \int_0^{\pi}(1-\sin^2 t)\,dt\right] = \frac{\pi}{3}\left(\pi - \int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt\right).$$

Abbiamo così visto che $\int_0^{\pi} \sin^2 t\,dt = \pi - \int_0^{\pi} \sin^2 t\,dt$, cioè $\int_0^{\pi} \sin^2 t\,dt = \pi/2$.

In conclusione, $V_X = \pi^2/6$.

Il volume V_Y è dato da $2\pi \int_0^{\pi/3} x \sin(3x)\,dx$, cioè

$$V_Y = 2\pi \int_0^{\pi/3} x \sin(3x)\,dx \underset{\substack{t=3x,\ x=\frac{1}{3}t \\ dx=\frac{1}{3}dt}}{=} 2\pi \int_0^{\pi} \frac{1}{3} t \sin t\,\frac{1}{3}\,dt = \frac{2\pi}{9}\int_0^{\pi} t \sin t\,dt \underset{\text{per parti}}{=}$$

$$= \frac{2\pi}{9}\left[-t\cos t\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos t\,dt\right] = \frac{2\pi}{9}\left(\pi + \sin t\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2\pi^2}{9}.$$

Quindi cerchiamo $a \in \mathbb{R}$ per cui

$$a\frac{\pi^2}{6} = \frac{2\pi^2}{9} \Rightarrow a = 4/3.$$

ANALISI MATEMATICA 1 - Terzo appello	14 giugno 2016

3. (6 punti) Determinate la soluzione y del problema (A) e, per ogni valore del parametro $\lambda \in \mathbf{R}$, la soluzione y del problema (B):

$$(A) \quad \begin{cases} y'' - 4y' + 13y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(\pi/6) = 1 \end{cases} \qquad , \qquad (B) \quad \begin{cases} y'' - 4y' + 13y = \lambda \\ y(0) = 0 \\ y(\pi/6) = 0\,. \end{cases}$$

Il problema (A) è relativo ad un'equazione lineare del II° ordine, a coefficienti costanti ed omogenea. Il polinomio associato è $r^2-4r+13$, e le radici sono

$$r^2-4r+13=0 \longrightarrow r = 2 \mp \sqrt{4-13} = 2 \mp 3i\,.$$

Le soluzioni dell'equazione sono dunque

$$y(x) = c_1 e^{2x}\cos(3x) + c_2 e^{2x}\sin(3x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le due altre condizioni si ha

$$1 = y(0) = c_1$$
$$1 = y(\pi/6) = c_1 e^{\pi/3}\cos \pi/2 + c_2 e^{\pi/3}\sin \pi/2 = c_2 e^{\pi/3},$$

da cui $c_1 = 1$ e $c_2 = e^{-\pi/3}$. La soluzione di (A) è dunque

$$y(x) = e^{2x}\cos(3x) + e^{-\pi/3}e^{2x}\sin(3x)\,.$$

Il problema (B) è analogo al problema (A), ma l'equazione è non-omogenea. Dunque bisogna trovare una soluzione particolare. Siccome il termine a destra è una costante, si può provare con una costante: $y_*(x) = K$. Ne segue $y_*'(x) = 0$, $y_*''(x) = 0$ e dunque deve essere $13K = \lambda$, cioè $K = \lambda/13$.

Le soluzioni dell'equazione sono dunque

$$y(x) = c_1 e^{2x}\cos(3x) + c_2 e^{2x}\sin(3x) + \lambda/13\,.$$

Imponendo le altre due condizioni si ha

$$0 = y(0) = c_1 + \lambda/13$$
$$0 = y(\pi/6) = c_1 e^{\pi/3}\cos \pi/2 + c_2 e^{\pi/3}\sin \pi/2 + \frac{\lambda}{13} = c_2 e^{\pi/3} + \lambda/13,$$

da cui $c_1 = -\lambda/13$, $c_2 = -\lambda/13\, e^{-\pi/3}$. La soluzione di (B) è dunque

$$y(x) = -\frac{\lambda}{13}e^{2x}\cos(3x) - \frac{\lambda}{13}e^{-\pi/3}e^{2x}\sin(3x) + \frac{\lambda}{13}\,.$$