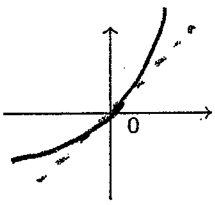
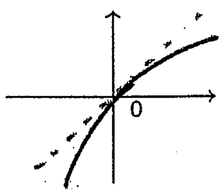
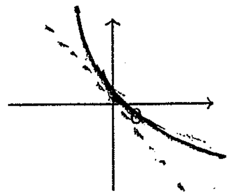
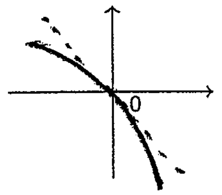
ANALISI MATEMATICA 1		15 luglio 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Sia f una funzione continua, con derivata prima e seconda continue, tale che $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $f''(0) = 1$. Allora il grafico della funzione $g(x) = f(x)e^{-f(x)}$ vicino all'origine è:

$\boxed{a}$  ; $\boxtimes$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxed{d}$ 

2. Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Il punto x_0 è di minimo relativo ma non assoluto per $f(x)$ se: $\boxed{a}$ non esiste $x^* \in \mathbf{R}$ tale che $f(x^*) < f(x_0)$; $\boxed{b}$ esiste $x^* \in \mathbf{R}$ con $f(x^*) > f(x_0)$ ed esiste $r > 0$ tale che, se $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, allora $f(x) \le f(x_0)$; $\boxtimes$ esiste $x^* \in \mathbf{R}$ con $f(x^*) < f(x_0)$ ed esiste $r > 0$ tale che, se $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, allora $f(x) \ge f(x_0)$; $\boxed{d}$ non esiste $x^* \in \mathbf{R}$ tale che $f(x^*) > f(x_0)$.

3. Nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ sia $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$ la serie di Fourier della funzione $q(x) = 3x + 3|x|$. Allora $b_3 =$ $\boxed{a}$ 2/3; $\boxed{b}$ 4/3; $\boxtimes$ 2; $\boxed{d}$ 1/3.

4. Sia γ la curva data dal grafico di $f(x) = \arctan x$, $x \in [0, 1]$. Allora la lunghezza di γ è data da: $\boxed{a}$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+4x+8x^2+4x^3+x^4}{1+4x+6x^2+4x^3+x^4}}\,dx$; $\boxed{b}$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+6x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}}\,dx$; $\boxed{c}$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{2+4x+6x^2+4x^3+x^4}{1+4x+6x^2+4x^3+x^4}}\,dx$; $\boxtimes$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{2+2x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}}\,dx$.

5. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora $\int_0^{\sqrt{2}} x^3 f(\frac{x^2}{2})dx =$ $\boxed{a}$ $32\int_0^1 t^2 f(t)dt$; $\boxed{b}$ $8\int_0^1 tf(t)dt$; $\boxtimes$ $2\int_0^1 tf(t)dt$; $\boxed{d}$ $4\int_0^1 t^2 f(t)dt$.

6. Determinare i numeri complessi soluzione dell'equazione $2z^2 + iz = 1$. $\boxed{a}$ $z = \pm\frac{\sqrt{7}}{4} + i\frac{1}{4}$; $\boxed{b}$ $z = \frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{11}}{4}$; $\boxtimes$ $z = \pm\frac{\sqrt{7}}{4} - i\frac{1}{4}$; $\boxed{d}$ $z = -\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{11}}{4}$.

7. Sia $f(t) = t^6 \log t - 6\sqrt{t}$ e sia $g(x) = x^2$. Allora l'equazione della retta normale al grafico della funzione composta $h = f \circ g$ nel punto di ascissa $x_0 = 1$ risulta $\boxtimes$ $y = \frac{1}{4}x - \frac{25}{4}$; $\boxed{b}$ $y = x - 4$; $\boxed{c}$ $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$; $\boxed{d}$ $y = \frac{1}{3}x - \frac{16}{3}$.

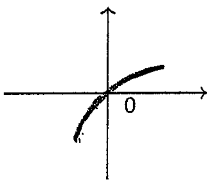
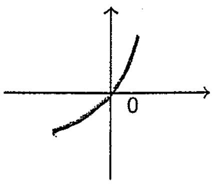
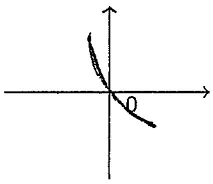
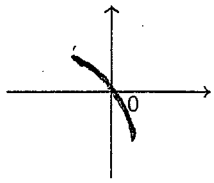
8. Quante volte si azzera la funzione $f(x) = 1 + x - x^2 - x^3$? $\boxed{a}$ 4; $\boxed{b}$ 1; $\boxtimes$ 2; $\boxed{d}$ 3.

ANALISI MATEMATICA 1		15 luglio 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. Quante volte si azzera la funzione $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$? $\boxed{a}$ 2; $\boxed{b}$ 3; $\boxed{c}$ 4; $\boxed{\times}$ 1.

2. Sia f una funzione continua, con derivata prima e seconda continue, tale che $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $f''(0) = 1$. Allora il grafico della funzione $g(x) = f(x)e^{-f(x)}$ vicino all'origine è:

$\boxed{\times}$  ; $\boxed{b}$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxed{d}$  .

3. Determinare i numeri complessi soluzione dell'equazione $2z^2 + \overline{z} = -1$. $\boxed{a}$ $z = \pm\frac{\sqrt{7}}{4} - i\frac{1}{4}$; $\boxed{b}$ $z = -\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{11}}{4}$; $\boxed{c}$ $z = \pm\frac{\sqrt{7}}{4} + i\frac{1}{4}$; $\boxed{\times}$ $z = \frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{11}}{4}$.

4. Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Il punto x_0 è di minimo assoluto per $f(x)$ se: $\boxed{a}$ esiste $x^* \in \mathbf{R}$ con $f(x^*) < f(x_0)$ ed esiste $r > 0$ tale che, se $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, allora $f(x) \geq f(x_0)$; $\boxed{b}$ non esiste $x^* \in \mathbf{R}$ tale che $f(x^*) > f(x_0)$; $\boxed{\times}$ non esiste $x^* \in \mathbf{R}$ tale che $f(x^*) < f(x_0)$; $\boxed{d}$ esiste $x^* \in \mathbf{R}$ con $f(x^*) > f(x_0)$ ed esiste $r > 0$ tale che, se $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, allora $f(x) \leq f(x_0)$.

5. Sia $f(t) = t^4 \log t - 4\sqrt{t}$ e sia $g(x) = x^2$. Allora l'equazione della retta normale al grafico della funzione composta $h = f \circ g$ nel punto di ascissa $x_0 = 1$ risulta $\boxed{\times}$ $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$; $\boxed{b}$ $y = \frac{1}{3}x - \frac{16}{3}$; $\boxed{c}$ $y = \frac{1}{4}x - \frac{25}{4}$; $\boxed{d}$ $y = x - 4$.

6. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora $\int_0^{\sqrt{2}} x^3 f(\frac{x^2}{2})dx =$ $\boxed{\times}$ $2\int_0^1 tf(t)dt$; $\boxed{b}$ $4\int_0^1 t^2 f(t)dt$; $\boxed{c}$ $32\int_0^1 t^2 f(t)dt$; $\boxed{d}$ $8\int_0^1 tf(t)dt$.

7. Nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ sia $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big)$ la serie di Fourier della funzione $g(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$. Allora $b_3 =$ $\boxed{a}$ 2; $\boxed{\times}$ 1/3; $\boxed{c}$ 2/3; $\boxed{d}$ 4/3.

8. Sia γ la curva data dal grafico di $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $x \in [0,1]$. Allora la lunghezza di γ è data da: $\boxed{\times}$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{2+4x+6x^2+4x^3+x^4}{1+4x+6x^2+4x^3+x^4}}\,dx$; $\boxed{b}$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{2+2x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}}\,dx$; $\boxed{c}$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+4x+8x^2+4x^3+x^4}{1+4x+6x^2+4x^3+x^4}}\,dx$; $\boxed{d}$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+6x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}}\,dx$.

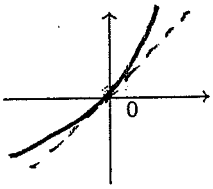
ANALISI MATEMATICA 1		15 luglio 2009
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

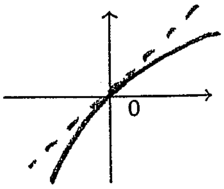
- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

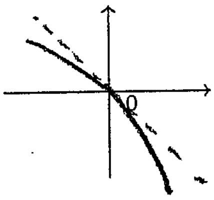
1. Sia $f(t) = t^5 \log t - 5\sqrt{t}$ e sia $g(x) = x^2$. Allora l'equazione della retta normale al grafico della funzione composta $h = f \circ g$ nel punto di ascissa $x_0 = 1$ risulta $\boxed{a}$ $y = x - 4$; $\boxed{b}$ $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$; $\boxtimes$ $y = \frac{1}{3}x - \frac{16}{3}$; $\boxed{d}$ $y = \frac{1}{4}x - \frac{25}{4}$.

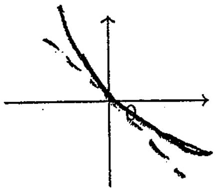
2. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora $\int_0^{\sqrt{2}} x^5 f(\frac{x^2}{2})dx =$ $\boxed{a}$ $8\int_0^1 tf(t)dt$; $\boxed{b}$ $2\int_0^1 tf(t)dt$; $\boxtimes$ $4\int_0^1 t^2 f(t)dt$; $\boxed{d}$ $32\int_0^1 t^2 f(t)dt$.

3. Sia f una funzione continua, con derivata prima e seconda continue, tale che $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $f''(0) = 1$. Allora il grafico della funzione $g(x) = -f(x)e^{f(x)}$ vicino all'origine è:

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxtimes$ 

; $\boxed{d}$ 

.

4. Determinare i numeri complessi soluzione dell'equazione $2z^2 - iz = 1$. $\boxed{a}$ $z = \frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{11}}{4}$; $\boxed{b}$ $z = \pm\frac{\sqrt{7}}{4} - i\frac{1}{4}$; $\boxed{c}$ $z = -\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{11}}{4}$; $\boxtimes$ $z = \pm\frac{\sqrt{7}}{4} + i\frac{1}{4}$.

5. Sia γ la curva data dal grafico di $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$, $x \in [0,1]$. Allora la lunghezza di γ è data da: $\boxed{a}$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+6x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}}\, dx$; $\boxtimes$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{2+4x+6x^2+4x^3+x^4}{1+4x+6x^2+4x^3+x^4}}\, dx$; $\boxed{c}$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{2+2x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}}\, dx$; $\boxed{d}$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+4x+8x^2+4x^3+x^4}{1+4x+6x^2+4x^3+x^4}}\, dx$.

6. Quante volte si azzera la funzione $f(x) = 1 - x - x^2 + x^3$? $\boxed{a}$ 1; $\boxtimes$ 2; $\boxed{c}$ 3; $\boxed{d}$ 4.

7. Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Il punto x_0 è di massimo relativo ma non assoluto per $f(x)$ se: $\boxtimes$ esiste $x^* \in \mathbf{R}$ con $f(x^*) > f(x_0)$ ed esiste $r > 0$ tale che, se $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, allora $f(x) \leq f(x_0)$; $\boxed{b}$ esiste $x^* \in \mathbf{R}$ con $f(x^*) < f(x_0)$ ed esiste $r > 0$ tale che, se $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, allora $f(x) \geq f(x_0)$; $\boxed{c}$ non esiste $x^* \in \mathbf{R}$ tale che $f(x^*) > f(x_0)$; $\boxed{d}$ non esiste $x^* \in \mathbf{R}$ tale che $f(x^*) < f(x_0)$.

8. Nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ sia $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$ la serie di Fourier della funzione $h(x) = x + |x|$. Allora $b_3 =$ $\boxed{a}$ 4/3; $\boxed{b}$ 2; $\boxed{c}$ 1/3; $\boxtimes$ 2/3.

ANALISI MATEMATICA 1		15 luglio 2009
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

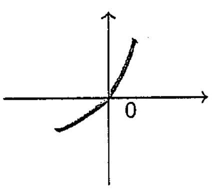
- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

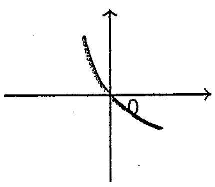
1. Sia γ la curva data dal grafico di $f(x) = \log(1+x^2)$, $x \in [0,1]$. Allora la lunghezza di γ è data da: $\boxed{a}$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+4x+8x^2+4x^3+x^4}{1+4x+6x^2+4x^3+x^4}}\,dx$; $\boxtimes$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+6x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}}\,dx$; $\boxed{c}$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{2+4x+6x^2+4x^3+x^4}{1+4x+6x^2+4x^3+x^4}}\,dx$; $\boxed{d}$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{2+2x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}}\,dx$.

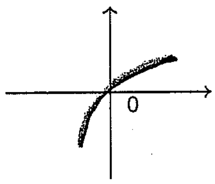
2. Quante volte si azzera la funzione $f(x) = 1 + x - x^2 - x^3$? $\boxed{a}$ 4; $\boxed{b}$ 1; $\boxtimes$ 2; $\boxed{d}$ 3.

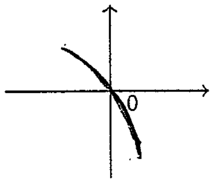
3. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora $\int_0^2 x^3 f(\frac{x^2}{4})dx =$ $\boxed{a}$ $32\int_0^1 t^2 f(t)dt$; $\boxtimes$ $8\int_0^1 tf(t)dt$; $\boxed{c}$ $2\int_0^1 tf(t)dt$; $\boxed{d}$ $4\int_0^1 t^2 f(t)dt$.

4. Sia f una funzione continua, con derivata prima e seconda continue, tale che $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $f''(0) = 1$. Allora il grafico della funzione $g(x) = f(x)e^{f(x)}$ vicino all'origine è:

$\boxtimes$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

5. Nell'intervallo $(-\pi,\pi)$ sia $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right)$ la serie di Fourier della funzione $f(x) = 2(x+|x|)$. Allora $b_3 =$ $\boxed{a}$ $2/3$; $\boxtimes$ $4/3$; $\boxed{c}$ 2; $\boxed{d}$ $1/3$.

6. Sia $f(t) = t^6\log t - 6\sqrt{t}$ e sia $g(x) = x^2$. Allora l'equazione della retta normale al grafico della funzione composta $h = f\circ g$ nel punto di ascissa $x_0 = 1$ risulta $\boxtimes$ $y = \frac{1}{4}x - \frac{25}{4}$; $\boxed{b}$ $y = x - 4$; $\boxed{c}$ $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$; $\boxed{d}$ $y = \frac{1}{3}x - \frac{16}{3}$.

7. Determinare i numeri complessi soluzione dell'equazione $2z^2 + iz = 1$. $\boxed{a}$ $z = \pm\frac{\sqrt{7}}{4} + i\frac{1}{4}$; $\boxed{b}$ $z = \frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{11}}{4}$; $\boxtimes$ $z = \pm\frac{\sqrt{7}}{4} - i\frac{1}{4}$; $\boxed{d}$ $z = -\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{11}}{4}$.

8. Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Il punto x_0 è di minimo relativo ma non assoluto per $f(x)$ se: $\boxed{a}$ non esiste $x^* \in \mathbf{R}$ tale che $f(x^*) < f(x_0)$; $\boxed{b}$ esiste $x^* \in \mathbf{R}$ con $f(x^*) > f(x_0)$ ed esiste $r > 0$ tale che, se $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, allora $f(x) \le f(x_0)$; $\boxtimes$ esiste $x^* \in \mathbf{R}$ con $f(x^*) < f(x_0)$ ed esiste $r > 0$ tale che, se $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, allora $f(x) \ge f(x_0)$; $\boxed{d}$ non esiste $x^* \in \mathbf{R}$ tale che $f(x^*) > f(x_0)$.

ANALISI MATEMATICA 1		15 luglio 2009
~~Cognome:~~	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

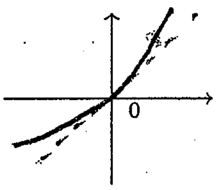
1. Determinare i numeri complessi soluzione dell'equazione $2z^2 - \overline{z} = -1$. $\boxed{a}$ $z = \frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{11}}{4}$; $\boxed{b}$ $z = \pm\frac{\sqrt{7}}{4} - i\frac{1}{4}$; $\boxtimes$ $z = -\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{11}}{4}$; $\boxed{d}$ $z = \pm\frac{\sqrt{7}}{4} + i\frac{1}{4}$.

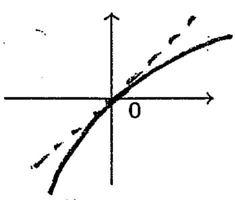
2. Nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ sia $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big)$ la serie di Fourier della funzione $g(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$. Allora $b_3 =$ $\boxed{a}$ 4/3; $\boxed{b}$ 2; $\boxtimes$ 1/3; $\boxed{d}$ 2/3.

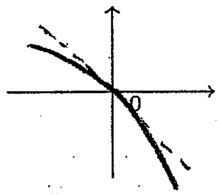
3. Sia γ la curva data dal grafico di $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$, $x \in [0,1]$. Allora la lunghezza di γ è data da: $\boxed{a}$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+6x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}}\,dx$; $\boxtimes$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{2+4x+6x^2+4x^3+x^4}{1+4x+6x^2+4x^3+x^4}}\,dx$; $\boxed{c}$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{2+2x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}}\,dx$; $\boxed{d}$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+4x+8x^2+4x^3+x^4}{1+4x+6x^2+4x^3+x^4}}\,dx$.

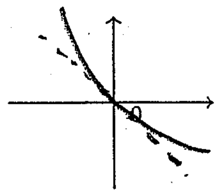
4. Sia $f(t) = t^5 \log t - 5\sqrt{t}$ e sia $g(x) = x^2$. Allora l'equazione della retta normale al grafico della funzione composta $h = f \circ g$ nel punto di ascissa $x_0 = 1$ risulta $\boxed{a}$ $y = x - 4$; $\boxed{b}$ $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$; $\boxtimes$ $y = \frac{1}{3}x - \frac{16}{3}$; $\boxed{d}$ $y = \frac{1}{4}x - \frac{25}{4}$.

5. Sia f una funzione continua, con derivata prima e seconda continue, tale che $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $f''(0) = 1$. Allora il grafico della funzione $g(x) = -f(x)e^{f(x)}$ vicino all'origine è:

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxtimes$ 

; $\boxed{d}$ 

.

6. Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Il punto x_0 è di massimo assoluto per $f(x)$ se: $\boxed{a}$ esiste $x^* \in \mathbf{R}$ con $f(x^*) > f(x_0)$ ed esiste $r > 0$ tale che, se $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, allora $f(x) \leq f(x_0)$; $\boxed{b}$ esiste $x^* \in \mathbf{R}$ con $f(x^*) < f(x_0)$ ed esiste $r > 0$ tale che, se $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, allora $f(x) \geq f(x_0)$; $\boxtimes$ non esiste $x^* \in \mathbf{R}$ tale che $f(x^*) > f(x_0)$; $\boxed{d}$ non esiste $x^* \in \mathbf{R}$ tale che $f(x^*) < f(x_0)$.

7. Quante volte si azzera la funzione $f(x) = 1 - x + 2x^2 - 2x^3$? $\boxtimes$ 1; $\boxed{b}$ 2; $\boxed{c}$ 3; $\boxed{d}$ 4.

8. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora $\int_0^{\sqrt{2}} x^5 f(\frac{x^2}{2})dx =$ $\boxed{a}$ $8\int_0^1 tf(t)dt$; $\boxed{b}$ $2\int_0^1 tf(t)dt$; $\boxtimes$ $4\int_0^1 t^2 f(t)dt$; $\boxed{d}$ $32\int_0^1 t^2 f(t)dt$.

ANALISI MATEMATICA 1		15 luglio 2009
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora $\int_0^2 x^3 f(\frac{x^2}{4})dx =$ [a] $4\int_0^1 t^2 f(t)dt$; [b] $32\int_0^1 t^2 f(t)dt$; [c] $8\int_0^1 tf(t)dt$; [d] $2\int_0^1 tf(t)dt$.

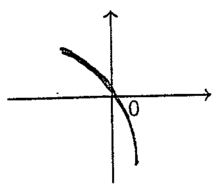
2. Determinare i numeri complessi soluzione dell'equazione $2z^2 + \overline{z} = -1$. [a] $z = -\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{11}}{4}$; [b] $z = \pm\frac{\sqrt{7}}{4} + i\frac{1}{4}$; [c] $z = \frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{11}}{4}$; [d] $z = \pm\frac{\sqrt{7}}{4} - i\frac{1}{4}$.

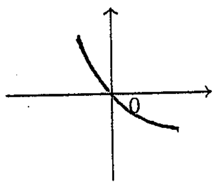
3. Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Il punto x_0 è di massimo relativo ma non assoluto per $f(x)$ se: [a] non esiste $x^* \in \mathbf{R}$ tale che $f(x^*) > f(x_0)$; [b] non esiste $x^* \in \mathbf{R}$ tale che $f(x^*) < f(x_0)$; [c] esiste $x^* \in \mathbf{R}$ con $f(x^*) > f(x_0)$ ed esiste $r > 0$ tale che, se $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, allora $f(x) \leq f(x_0)$; [d] esiste $x^* \in \mathbf{R}$ con $f(x^*) < f(x_0)$ ed esiste $r > 0$ tale che, se $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, allora $f(x) \geq f(x_0)$.

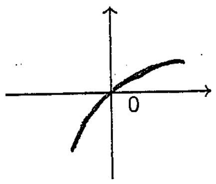
4. Nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ sia $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ la serie di Fourier della funzione $f(x) = 2(x + |x|)$. Allora $b_3 =$ [a] 1/3; [b] 2/3; [c] 4/3; [d] 2.

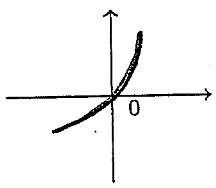
5. Quante volte si azzera la funzione $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$? [a] 3; [b] 4; [c] 1; [d] 2.

6. Sia f una funzione continua, con derivata prima e seconda continue, tale che $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $f''(0) = 1$. Allora il grafico della funzione $g(x) = f(x)e^{f(x)}$ vicino all'origine è:

[a] 

; [b] 

; [c] 

; [d] 

.

7. Sia γ la curva data dal grafico di $f(x) = \log(1 + x^2)$, $x \in [0, 1]$. Allora la lunghezza di γ è data da: [a] $\int_0^1 \sqrt{\frac{2+2x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}}\,dx$; [b] $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+4x+8x^2+4x^3+x^4}{1+4x+6x^2+4x^3+x^4}}\,dx$; [c] $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+6x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}}\,dx$; [d] $\int_0^1 \sqrt{\frac{2+4x+6x^2+4x^3+x^4}{1+4x+6x^2+4x^3+x^4}}\,dx$.

8. Sia $f(t) = t^3 \log t - 3\sqrt{t}$ e sia $g(x) = x^2$. Allora l'equazione della retta normale al grafico della funzione composta $h = f \circ g$ nel punto di ascissa $x_0 = 1$ risulta [a] $y = \frac{1}{3}x - \frac{16}{3}$; [b] $y = \frac{1}{4}x - \frac{25}{4}$; [c] $y = x - 4$; [d] $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$.

ANALISI MATEMATICA 1		15 luglio 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. Nell'intervallo $(-\pi,\pi)$ sia $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right)$ la serie di Fourier della funzione $q(x)=3x+3|x|$. Allora $b_3=$ $\boxed{a}$ 1/3; $\boxed{b}$ 2/3; $\boxed{c}$ 4/3; $\boxtimes$ 2.

2. Sia $f(t)=t^3\log t-3\sqrt{t}$ e sia $g(x)=x^2$. Allora l'equazione della retta normale al grafico della funzione composta $h=f\circ g$ nel punto di ascissa $x_0=1$ risulta $\boxed{a}$ $y=\frac{1}{3}x-\frac{16}{3}$; $\boxed{b}$ $y=\frac{1}{4}x-\frac{25}{4}$; $\boxtimes$ $y=x-4$; $\boxed{d}$ $y=\frac{1}{2}x-\frac{9}{2}$.

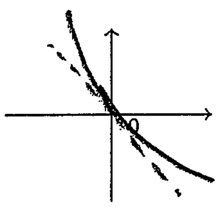
3. Quante volte si azzera la funzione $f(x)=1-x+2x^2-2x^3$? $\boxed{a}$ 3; $\boxed{b}$ 4; $\boxtimes$ 1; $\boxed{d}$ 2.

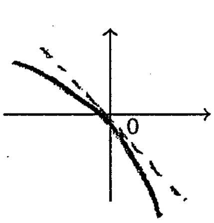
4. Sia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ una funzione continua. Allora $\int_0^2 x^5 f(\frac{x^2}{4})dx=$ $\boxed{a}$ $4\int_0^1 t^2 f(t)dt$; $\boxtimes$ $32\int_0^1 t^2 f(t)dt$; $\boxed{c}$ $8\int_0^1 tf(t)dt$; $\boxed{d}$ $2\int_0^1 tf(t)dt$.

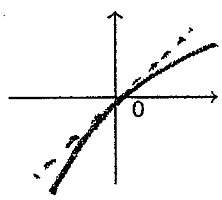
5. Si consideri la funzione $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. Il punto x_0 è di massimo assoluto per $f(x)$ se: $\boxtimes$ non esiste $x^*\in\mathbf{R}$ tale che $f(x^*)>f(x_0)$; $\boxed{b}$ non esiste $x^*\in\mathbf{R}$ tale che $f(x^*)<f(x_0)$; $\boxed{c}$ esiste $x^*\in\mathbf{R}$ con $f(x^*)>f(x_0)$ ed esiste $r>0$ tale che, se $x\in(x_0-r,x_0+r)$, allora $f(x)\le f(x_0)$; $\boxed{d}$ esiste $x^*\in\mathbf{R}$ con $f(x^*)<f(x_0)$ ed esiste $r>0$ tale che, se $x\in(x_0-r,x_0+r)$, allora $f(x)\ge f(x_0)$.

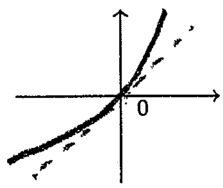
6. Sia γ la curva data dal grafico di $f(x)=\arctan x$, $x\in[0,1]$. Allora la lunghezza di γ è data da: $\boxtimes$ $\int_0^1\sqrt{\frac{2+2x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}}\,dx$; $\boxed{b}$ $\int_0^1\sqrt{\frac{1+4x+8x^2+4x^3+x^4}{1+4x+6x^2+4x^3+x^4}}\,dx$; $\boxed{c}$ $\int_0^1\sqrt{\frac{1+6x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}}\,dx$; $\boxed{d}$ $\int_0^1\sqrt{\frac{2+4x+6x^2+4x^3+x^4}{1+4x+6x^2+4x^3+x^4}}\,dx$.

7. Sia f una funzione continua, con derivata prima e seconda continue, tale che $f(0)=0$, $f'(0)=1$ e $f''(0)=1$. Allora il grafico della funzione $g(x)=-f(x)e^{-f(x)}$ vicino all'origine è:

$\boxtimes$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

8. Determinare i numeri complessi soluzione dell'equazione $2z^2-\overline{z}=-1$. $\boxtimes$ $z=-\frac{1}{4}\pm i\frac{\sqrt{11}}{4}$; $\boxed{b}$ $z=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}+i\frac{1}{4}$; $\boxed{c}$ $z=\frac{1}{4}\pm i\frac{\sqrt{11}}{4}$; $\boxed{d}$ $z=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}-i\frac{1}{4}$.

ANALISI MATEMATICA 1		15 luglio 2009
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Il punto x_0 è di minimo assoluto per $f(x)$ se: $\boxed{a}$ esiste $x^* \in \mathbf{R}$ con $f(x^*) < f(x_0)$ ed esiste $r > 0$ tale che, se $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, allora $f(x) \geq f(x_0)$; $\boxed{b}$ non esiste $x^* \in \mathbf{R}$ tale che $f(x^*) > f(x_0)$; $\boxtimes$ non esiste $x^* \in \mathbf{R}$ tale che $f(x^*) < f(x_0)$; $\boxed{d}$ esiste $x^* \in \mathbf{R}$ con $f(x^*) > f(x_0)$ ed esiste $r > 0$ tale che, se $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, allora $f(x) \leq f(x_0)$.

2. Sia γ la curva data dal grafico di $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $x \in [0,1]$. Allora la lunghezza di γ è data da: $\boxtimes$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{2+4x+6x^2+4x^3+x^4}{1+4x+6x^2+4x^3+x^4}}\,dx$; $\boxed{b}$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{2+2x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}}\,dx$; $\boxed{c}$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+4x+8x^2+4x^3+x^4}{1+4x+6x^2+4x^3+x^4}}\,dx$; $\boxed{d}$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+6x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}}\,dx$.

3. Sia $f(t) = t^4 \log t - 4\sqrt{t}$ e sia $g(x) = x^2$. Allora l'equazione della retta normale al grafico della funzione composta $h = f \circ g$ nel punto di ascissa $x_0 = 1$ risulta $\boxtimes$ $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$; $\boxed{b}$ $y = \frac{1}{3}x - \frac{16}{3}$; $\boxed{c}$ $y = \frac{1}{4}x - \frac{25}{4}$; $\boxed{d}$ $y = x - 4$.

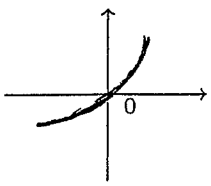
4. Quante volte si azzera la funzione $f(x) = 1 - x - x^2 + x^3$? $\boxtimes$ 2; $\boxed{b}$ 3; $\boxed{c}$ 4; $\boxed{d}$ 1.

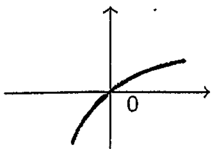
5. Determinare i numeri complessi soluzione dell'equazione $2z^2 - iz = 1$. $\boxed{a}$ $z = \pm\frac{\sqrt{7}}{4} - i\frac{1}{4}$; $\boxed{b}$ $z = -\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{11}}{4}$; $\boxtimes$ $z = \pm\frac{\sqrt{7}}{4} + i\frac{1}{4}$; $\boxed{d}$ $z = \frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{11}}{4}$.

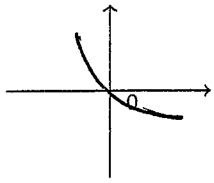
6. Nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ sia $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$ la serie di Fourier della funzione $h(x) = x + |x|$. Allora $b_3 =$ $\boxed{a}$ 2; $\boxed{b}$ 1/3; $\boxtimes$ 2/3; $\boxed{d}$ 4/3.

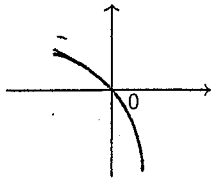
7. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora $\int_0^2 x^5 f(\frac{x^2}{4})dx =$ $\boxed{a}$ $2\int_0^1 tf(t)dt$; $\boxed{b}$ $4\int_0^1 t^2 f(t)dt$; $\boxtimes$ $32\int_0^1 t^2 f(t)dt$; $\boxed{d}$ $8\int_0^1 tf(t)dt$.

8. Sia f una funzione continua, con derivata prima e seconda continue, tale che $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $f''(0) = 1$. Allora il grafico della funzione $g(x) = -f(x)e^{-f(x)}$ vicino all'origine è:

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxtimes$ 

; $\boxed{d}$ 

.

ANALISI MATEMATICA I	15 luglio 2009

1. (6 punti)

Fissato $k > 0$, calcolare per $x \in [0,k]$ l'area A_k della regione compresa tra il grafico della funzione $f(x) = x - \arctan(2x)$ e la retta passante per il punto $(0, -\pi/2)$ e di pendenza 1.

Quanto vale $\lim_{k\to 0^+} \frac{A_k}{k}$?

La retta passante per il punto $(0, -\pi/2)$ e di pendenza 1 è $y = x - \pi/2$. Siccome $\arctan(2x) < \pi/2$ per ogni x, si ha $f(x) > x - \pi/2$, quindi l'area A_k è:

$$A_k = \int_0^k [x - \arctan(2x) - (x - \pi/2)]\, dx = \int_0^k \left[\frac{\pi}{2} - \arctan(2x)\right] dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}k - \left[x\arctan(2x)\Big|_0^k - \int_0^k x \frac{1}{1+4x^2} \cdot 2\, dx \right] =$$

per parti

$$= \frac{\pi}{2}k - k\arctan(2k) + \frac{1}{4}\log(1+4x^2)\Big|_0^k =$$

$$= \frac{\pi}{2}k - k\arctan(2k) + \frac{1}{4}\log(1+4k^2).$$

Dunque

$$\lim_{k\to 0^+} \frac{\pi/2\, k - k\arctan(2k) + 1/4 \log(1+4k^2)}{k} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \underbrace{\lim_{k\to 0^+} \arctan(2k)}_{=0} + \frac{1}{4}\underbrace{\lim_{k\to 0^+} \frac{\log(1+4k^2)}{k}}_{=0} = \pi/2.$$

[poiché $\log(1+4k^2) \sim 4k^2$ per $k \to 0$.]

2. (6 punti)
Si disegni qualitativamente il grafico della funzione $g(x) = x^3(1 + \log|x|)$ (insieme di definizione, limiti, crescenza/decrescenza; convessità/concavità).
Determinarne quindi, se esistono, il valore di massimo assoluto e il valore di minimo assoluto.

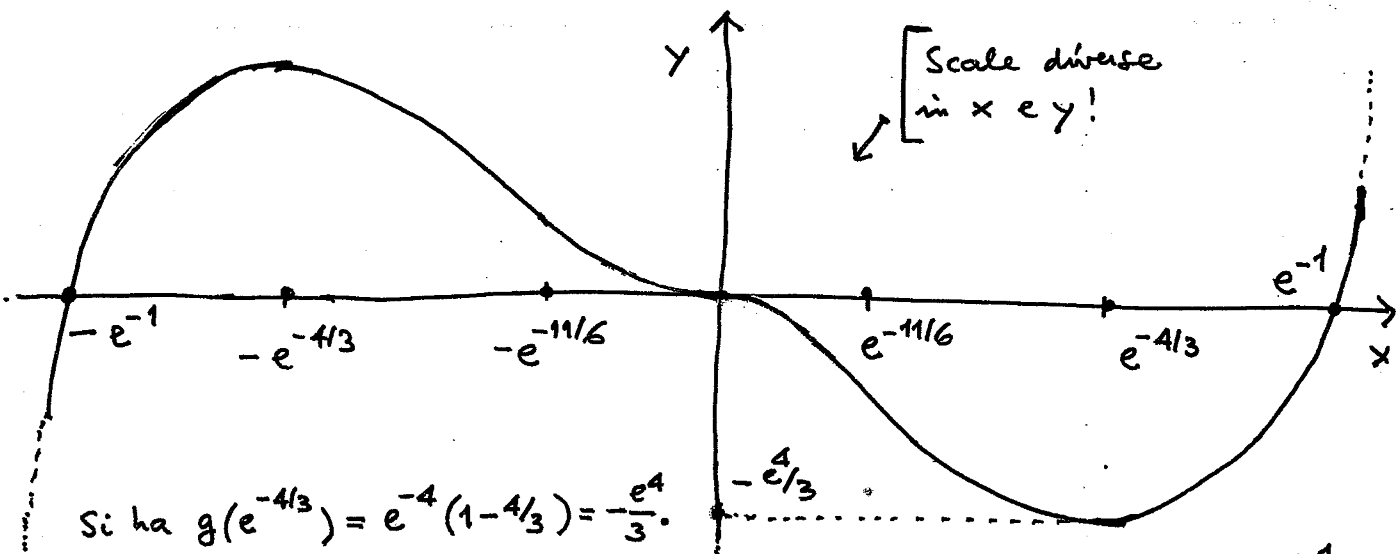
La funzione è dispari (x^3 è dispari, $1+\log|x|$ è pari): dunque la studio solo per $x>0$. (Per $x=0$ la funzione non è definita.)

Si ha $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, e

$$\lim_{x\to0^+} x^3(1+\log x) = \lim_{x\to0^+} \frac{1+\log x}{1/x^3} \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{1/x}{-3/x^4} = \lim_{x\to0^+} -\frac{x^3}{3} = 0.$$

Poi $g'(x) = 3x^2(1+\log x) + x^3 \cdot 1/x = x^2(3+3\log x+1) = x^2(4+3\log x)$, che è positiva per $\log x > -4/3$, cioè $x > e^{-4/3}$. Dunque $g(x)$ <u>decresce</u> per $0<x<e^{-4/3}$, <u>cresce</u> per $x>e^{-4/3}$.

Si ha $g''(x) = 2x(4+3\log x) + x^2 \cdot 3/x = x(11+6\log x)$, che è positiva per $\log x > -11/6$, cioè $x > e^{-11/6}$. Dunque $g(x)$ è <u>concava</u> per $0<x<e^{-11/6}$, <u>convessa</u> per $x>e^{-11/6}$.



Si ha $g(e^{-4/3}) = e^{-4}(1-4/3) = -\frac{e^4}{3}$.

Sappiamo anche che $g(x)=0$ per $\log|x| = -1$, $|x| = e^{-1} = 1/e$.

Inoltre $\lim_{x\to0^+} g'(x) = \lim_{x\to0^+} x^2(4+3\log x) = 0$ (Hôpital come prima), dunque g ha pendenza che tende a 0 quando $x\to0$.

Il massimo assoluto ed il minimo assoluto <u>non</u> esistono, dato che $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

3. (6 punti)
Si determini la soluzione $y(t)$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^2 \cos t \\ y(0) = \beta\,. \end{cases}$$

Si disegni approssimativamente il grafico della soluzione per $\beta = 1$ e per $\beta = 1/4$.

È un'equazione del 1° ordine, nonlineare, a variabili separabili.
Si ha

$$-\frac{1}{y} = \int \frac{dy}{y^2} = \int \cos t \, dt = \operatorname{sen} t + k,$$

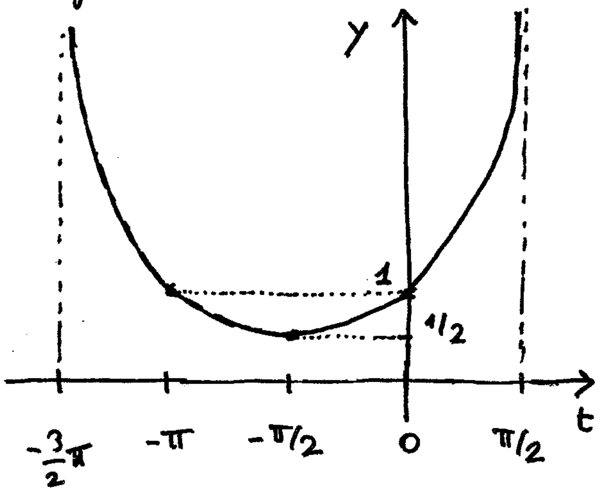
quindi $y(t) = -\dfrac{1}{\operatorname{sen} t + k}$. Imponendo il dato di Cauchy:

$$\beta = y(0) = -\frac{1}{\operatorname{sen} 0 + k} = -\frac{1}{k}, \quad \text{cioè } k = -1/\beta.$$

La soluzione è $\boxed{y(t) = \dfrac{1}{1/\beta - \operatorname{sen} t}}$ (periodica di periodo 2π).

La disegno dunque solo in un intervallo di ampiezza 2π. Siccome per $\beta=1$ si ha $1-\operatorname{sen}t=0$ per $t=\pi/2$, scegliamo l'intervallo $\left(-\frac{3}{2}\pi, \pi/2\right)$.
Siccome $y'(t) = y^2 \cos t$, il segno di y' è quello di $\cos t$, quindi $y(t)$ cresce per $-\pi/2 < t < \pi/2$, decresce per $-3\pi/2 < t < -\pi/2$.
Per $\beta = 1$, si ha $y(t) = \dfrac{1}{1-\operatorname{sen} t}$, e $\lim\limits_{t \to \pi/2^-} y(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t \to -\frac{3}{2}\pi^+} y(t) = +\infty$.
Poi $y(-\pi/2) = 1/2$, valore minimo.
Per $\beta = 1/4$, si ha $y(t) = \dfrac{1}{4-\operatorname{sen} t}$, e $y(-\frac{3}{2}\pi) = 1/3$, $y(-\pi/2) = 1/5$, $y(\pi/2) = 1/3$.
I grafici sono:

$\beta = 1$



$\beta = 1/4$