ANALISI MATEMATICA 1 - Terzo appello	17 giugno 2015

1. **(6 punti)** Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x^2)}{3\sin^2(2x)-12(e^{x^2}-1)}$$

Si ha, per $t \approx 0$:

$$\cos t = 1-\frac{t^2}{2}+o(t^2) \quad\longrightarrow\quad \cos(2x^2) = 1-2x^4+o(x^4)$$

$$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2) \quad\longrightarrow\quad e^{x^2} = 1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)$$

$$\sin t = t-\frac{t^3}{6}+o(t^3) \quad\longrightarrow\quad \sin(2x) = 2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^3),$$

e dunque

$$\sin^2(2x) = \left(2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\right)^2 = 4x^2-\frac{16}{3}x^4+o(x^4).$$

In conclusione:

$$\frac{1-\cos(2x^2)}{3\sin^2(2x)-12(e^{x^2}-1)} = \frac{1-(1-2x^4+o(x^4))}{3\left(4x^2-\frac{16}{3}x^4+o(x^4)\right)-12\left(x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)} =$$

$$= \frac{2x^4+o(x^4)}{-16x^4-6x^4+o(x^4)} \longrightarrow \frac{2}{-22} = -\frac{1}{11}.$$

ANALISI MATEMATICA 1 - Terzo appello	17 giugno 2015

2. (6 punti) Dati gli insiemi

$$Q_{1,t} = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le t, 0 \le y \le x^2\} \quad , \quad Q_{2,t} = \left\{(x,y)\,\middle|\,0 \le x \le t, 0 \le y \le \frac{x}{3}\right\},$$

siano rispettivamente $V_1(t)$ e $V_2(t)$ i volumi dei solidi ottenuti ruotando $Q_{1,t}$ e $Q_{2,t}$ attorno all'asse X. Si calcoli il minimo della funzione $K(t) = V_1(t) - V_2(t)$ per $t \in [0,1]$.

Il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando attorno all'asse X un insieme $\{(x,y)\,|\,a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$ è dato da $\int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$.

Dunque si ha

$$V_1(t) = \pi\int_0^t x^4\,dx = \pi\frac{t^5}{5}, \quad V_2(t) = \pi\int_0^t \frac{x^2}{9}\,dx = \frac{\pi}{27}t^3,$$

e $K(t) = \pi\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{27}\right)$.

Per determinarne il minimo su $[0,1]$ basta confrontare i valori $K(0)$, $K(1)$ e in eventuali punti di annullamento della derivata che siano interni a $[0,1]$ (cioè in $(0,1)$).

Si ha

$$K'(t) = \pi\left(t^4 - \frac{1}{9}t^2\right) = \pi t^2\left(t^2 - 1/9\right) = 0 \quad \text{per } t=0, t=-\frac{1}{3}, t=\frac{1}{3}.$$

Dunque va anche considerato il valore $K(1/3)$.

In conclusione:

$$K(0)=0 \quad , \quad K(1) = \pi\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{27}\right) = \pi\frac{22}{135} \quad , \quad K\left(\frac{1}{3}\right) = \pi\left(\frac{1}{3^5\cdot 5} - \frac{1}{3^3\cdot 3^3}\right) =$$

$$= \pi\frac{1}{3^5}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = \pi\frac{1}{3^5}\left(-\frac{2}{3\cdot 5}\right) = -\pi\frac{2}{3^6\cdot 5} = -\frac{2}{3645}\pi,$$

ed il minimo è $-\frac{2}{3645}\pi$.

ANALISI MATEMATICA 1 - Terzo appello	17 giugno 2015

3. (6 punti) (i) Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2+2y}{2y+2} \\ y(0) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

(ii) Si determinino tutte le eventuali soluzioni costanti dell'equazione differenziale $y' = \frac{y^2+2y}{2y+2}$.

(i) È un'equazione differenziale non-lineare del 1° ordine a variabili separabili. Si ha

$$\frac{2y+2}{y^2+2y}\,dy = dx$$

ed integrando

$$\log|y^2+2y| = x + c.$$

Imponendo il dato di Cauchy si ha

$$c = \log|(-1/2)^2+2(-1/2)| = \log|-3/4| = \log 3/4.$$

Questo dice anche che la soluzione ha valore $y^2+2y<0$ per x vicino a 0, per cui si conclude che $|y^2+2y| = -y^2-2y$ e dunque

$$\log(-y^2-2y) = x + \log 3/4 \implies -y^2-2y = e^x \cdot \frac{3}{4}.$$

Si ha

$$y^2+2y+\frac{3}{4}e^x = 0 \quad \text{per} \quad y = -1 \mp \sqrt{1-\frac{3}{4}e^x},$$

e siccome il dato di Cauchy è $-\frac{1}{2} > -1$ si deve scegliere il segno $+$:

$$\boxed{y(x) = -1+\sqrt{1-\tfrac{3}{4}e^x}.}$$

(ii) Una soluzione costante sarebbe data da $y(x)=k$, e dunque avrebbe $y'(x)=0$. Quindi dovrebbe soddisfare l'equazione

$$0 = y' = \frac{k^2+2k}{2k+2} \implies k=0,\ k=-2.$$

Dunque le soluzioni costanti sono $y(x)=0$ e $y(x)=-2$.