COGNOME | | NOME | | Matr. | |

Analisi Matematica II (EA)
19 dicembre 2012

Esercizio 1 (7 punti)
Dato il campo vettoriale $\vec{v}(x,y) = (x^3 y, x)$, si determini una funzione $g(x) > 0$ per cui il campo vettoriale $\vec{w}(x,y) = g(x)\vec{v}(x,y)$ sia irrotazionale nella regione $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x > 0\}$. Se è possibile, si determini anche un potenziale di $\vec{w}$ in D. [È utile ricordare che $(\log g)' = g'/g$.]

Risultati: $\boxed{g(x) = \frac{1}{x} e^{x^3/3}.}$ $\boxed{\varphi(x,y) = y e^{x^3/3} + c, \quad c \in \mathbb{R}.}$

Calcoli:

Si ha $\frac{\partial w_1}{\partial y} = g \frac{\partial v_1}{\partial y} = g x^3$, $\frac{\partial w_2}{\partial x} = g' v_2 + g \frac{\partial v_2}{\partial x} = g' x + g$, quindi bisogna imporre $g x^3 = g' x + g$, cioè $g'/g = (x^3 - 1)/x = x^2 - 1/x$.

Siccome $(\log g)' = g'/g$, si ha $(\log g)' = x^2 - 1/x$, cioè $\log g = x^3/3 - \log x + c$.

Scegliendo $c = 0$ ne deriva $g(x) = e^{x^3/3} e^{-\log x} = \frac{1}{x} e^{x^3/3}$.

Il campo $\vec{w}$ è quindi dato da $(x^2 y e^{x^3/3}, e^{x^3/3})$. Essendo irrotazionale nella regione D, che è semplicemente connessa, il campo $\vec{w}$ è conservativo.

Per determinarne un potenziale si impone

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = w_1 = x^2 y e^{x^3/3} \Rightarrow \varphi(x,y) = \int x^2 y e^{x^3/3} dx = y e^{x^3/3} + k(y),$$

da cui

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = e^{x^3/3} + k'(y) = e^{x^3/3} \Rightarrow k(y) = \text{cost}.$$

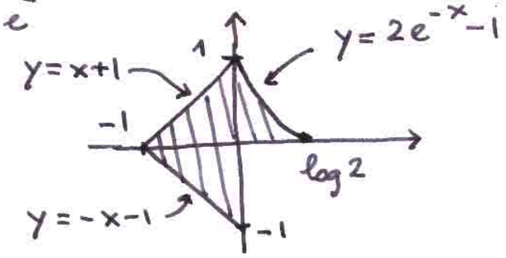
e quindi $\varphi(x,y) = y e^{x^3/3} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 (7 punti)

Sia K la regione limitata del piano delimitata dai grafici $\{y = 2e^{-x} - 1\}$, $\{y = x+1\}$, $\{y = -x-1\}$, dal semiasse negativo delle ordinate e dal semiasse positivo delle ascisse. Si calcoli $\iint_K |x|y\,dxdy$.

Risultato: $\boxed{\iint_K |x|y\,dxdy = \frac{3}{4}\log 2 + \frac{1}{4}(\log 2)^2 - \frac{5}{8}.}$

Calcoli: La regione è



[$2e^{-x} - 1 = 0$ per $e^{-x} = 1/2$, cioè
$x = -\log 1/2 = \log 2$.

Siccome $|x|y$ è una funzione dispari rispetto a y, e la riflessione $y \to -y$ porta il triangolo nel secondo quadrante nel triangolo nel terzo quadrante, basta calcolare l'integrale in $K \cap \{$primo quadrante$\}$. Quindi

$$\iint_K |x|y\,dx\,dy = \iint_{K\cap\{\text{primo quadrante}\}} |x|y\,dx\,dy = \int_0^{\log 2} dx \int_0^{2e^{-x}-1} xy\,dy =$$

$$= \int_0^{\log 2} x\,\frac{1}{2}(2e^{-x}-1)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\log 2} (x\,4e^{-2x} - x\,4e^{-x} + x)\,dx =$$

$$= 2\int_0^{\log 2} xe^{-2x}\,dx - 2\int_0^{\log 2} xe^{-x}\,dx + \frac{1}{4}(\log 2)^2 =$$

$$= 2\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}\Big|_0^{\log 2} + \frac{1}{2}\int_0^{\log 2} e^{-2x}\,dx\right] - 2\left[-xe^{-x}\Big|_0^{\log 2} + \int_0^{\log 2} e^{-x}\right] + \frac{1}{4}(\log 2)^2 =$$

$$= -\log 2\,\frac{1}{4} - \frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^{\log 2} + \cancel{2}\log 2\,\frac{1}{\cancel{2}} + 2e^{-x}\Big|_0^{\log 2} + \frac{1}{4}(\log 2)^2 =$$

$$= -\frac{1}{4}\log 2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \log 2 + \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} - 2 + \frac{1}{4}(\log 2)^2 =$$

$$= \frac{3}{4}\log 2 + \frac{1}{4}(\log 2)^2 - \frac{5}{8}.$$

[L'altro integrale, calcolato, avrebbe dato:

$$\iint_{K\cap\{3^\circ \text{ e } 2^\circ \text{ quadrante}\}} |x|y\,dx\,dy = -\int_{-1}^{0} dx \int_{-x-1}^{x+1} xy\,dy = -\int_{-1}^{0} x\,\frac{1}{2}\,y^2\Big|_{-x-1}^{x+1} dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} x\underbrace{\left[(x+1)^2 - (-x-1)^2\right]}_{\overset{\shortparallel}{0!}}dx =$$

$$= 0.\ ]$$

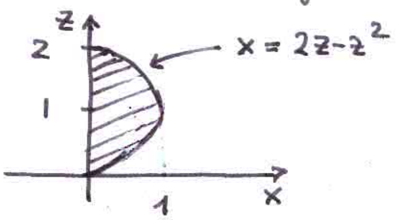
Esercizio 3 (8 punti)

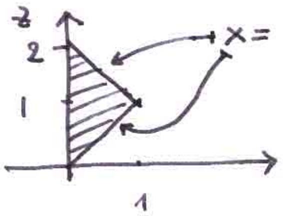
Sia Q la regione dello spazio ottenuto ruotando attorno all'asse z di un angolo π in senso antiorario l'insieme $\{(x,z) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 2z - z^2, 0 \le z \le 2\}$ e di un angolo π in senso orario l'insieme $\{(x,z) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1 - |z-1|, 0 \le z \le 2\}$. Si calcoli $\iiint_Q z^2 \, dxdydz$.

Risultato: $\boxed{\iiint_Q z^2 \, dx dy dz = \frac{41}{42}\pi .}$

Calcoli:

Essendo Q composto da due parti, ognuna delle quali è un solido di rotazione, l'integrazione per strati è la più indicata. Le due regioni che ruotano sono:





$x = 1 - |z-1| = \begin{cases} 2-z & \text{per } z \ge 1 \\ +z & \text{per } z \le 1 \end{cases}$

Ogni strato è composto da due semicerchi, uno di raggio $2z - z^2$ e uno di raggio $1 - |z-1|$, cioè $2-z$ per $1 \le z \le 2$ e z per $0 \le z \le 1$. Chiamiamoli $C_1(z)$ e $C_2(z)$.

Si deve quindi calcolare

$$\int_0^2 dz \iint_{C_1(z)} z^2 \, dx dy + \int_0^2 dz \iint_{C_2(z)} z^2 \, dx dy \overset{\text{coordinate polari}}{=} \int_0^2 dz \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2z-z^2} z^2 \rho \, d\rho +$$

$$+ \int_0^1 dz \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_0^{z} z^2 \rho \, d\rho + \int_1^2 dz \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_0^{2-z} z^2 \rho \, d\rho =$$

$$= \pi \left(\int_0^2 z^2 \frac{(2z-z^2)^2}{2} dz + \int_0^1 z^2 \frac{z^2}{2} dz + \int_1^2 z^2 \frac{(2-z)^2}{2} dz \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\int_0^2 (4z^4 + z^6 - 4z^5) dz + \frac{z^5}{5}\Big|_0^1 + \int_1^2 (4z^2 - 4z^3 + z^4) \, dz \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{4}{5} 2^5 + \frac{1}{7} 2^7 - \frac{4}{6} 2^6 + \cancel{\frac{1}{5}} + \frac{4}{3} 2^3 - 2^4 + \frac{1}{5} 2^5 - \frac{4}{3} + 1 - \cancel{\frac{1}{5}} \right) = \frac{41}{42}\pi .$$

Esercizio 4 (8 punti)

Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = (z, x, -y)$ attraverso la superficie

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, z = y^2 - x, (x,y) \in E\},$$

ove E è l'ellisse di semiassi 3 (rispetto a x) e 2 (rispetto a y). [Si scelga la normale che punta verso l'alto, cioè con terza componente positiva.]

Risultato: $\boxed{\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = 6\pi.}$

Calcoli:

Una parametrizzazione di S è data da $\vec{r}(x,y) = (x, y, y^2 - x)$, $(x,y) \in E$, e un vettore normale è dato da $\vec{N} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$, ove $f(x,y) = y^2 - x$, dunque da $(1, -2y, 1)$.

Quindi si ha (si ricordi $\vec{n}\, dS = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}\|\vec{N}\|\, dx\, dy = \vec{N}\, dx\, dy$)

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \iint_E (y^2 - x, x, -y)\cdot(1, -2y, 1)\, dx\, dy =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{coordinate ellittiche} \\ x = 3\rho\cos\theta \\ y = 2\rho\,\text{sen}\,\theta \end{array}\right., \ \rho \in [0,1], \theta \in [0, 2\pi] \qquad dx\,dy = 3\cdot 2\,\rho\, d\rho\, d\theta = 6\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(4\rho^2\,\text{sen}^2\theta - 3\rho\cos\theta - 2\cdot 6\rho^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - 2\rho\,\text{sen}\,\theta\right) 6\rho\, d\rho =$$

$$= 24 \cdot \int_0^{2\pi} \text{sen}^2\theta\, d\theta \cdot \int_0^1 \rho^3\, d\rho = 24\cdot\pi\cdot\frac{1}{4} = 6\pi.$$

$$\left[\begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = 0 \\ \int_0^{2\pi} \text{sen}\,\theta\, d\theta = 0 \\ \int_0^{2\pi} \text{sen}\,\theta\cos\theta\, d\theta = 0 \end{array}\right.$$